

## Exercice 1 (ENSEA 2022)

Les orages en montagne sont courants, et il arrive régulièrement qu'ils soient accompagnés de chutes de grêle. La grêle est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Cette partie s'intéresse à la modélisation de leur chute.

## III.1 Chute sans frottement

On considère un grêlon de masse  $m$ , qui chute dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ . On note  $z$  un axe descendant vers le sol.  $z = 0$  marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note  $\vec{e}_z$  un vecteur unitaire orienté vers le bas. On néglige ici tout frottement.

- 28 - Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du grêlon (on choisira une énergie potentielle nulle en  $z = 0$ ).
- 29 - Par une méthode énergétique, établir l'expression de la vitesse du grêlon en fonction de  $z$ .
- 30 - Estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable?

## III.2 Chute avec frottements quadratiques

On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note  $\vec{v} = v(t)\vec{e}_z$  la vitesse du grêlon. La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire :

$$\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z.$$

Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient  $\alpha$  est donné par  $\alpha = \frac{1}{2}\rho_{\text{air}}\pi R^2 C$ , avec  $\rho_{\text{air}}$  la masse volumique de l'air,  $R$  le rayon du grêlon et  $C \simeq 0,5$ .

- 31 - Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse  $v(t)$  du grêlon.
- 32 - Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note  $v_{\text{lim}}$  cette constante. On donnera son expression en fonction de  $\alpha$ ,  $m$  et  $g$ .
- On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse  $v_{\text{lim}}$ , appelée vitesse limite.

On étudie ensuite le mouvement du grêlon à l'aide d'une résolution numérique. Les hypothèses et notations sont toujours celles de la partie III.2. On utilise pour cela la méthode d'Euler, dans un algorithme écrit en Scilab retranscrit ci-dessous :

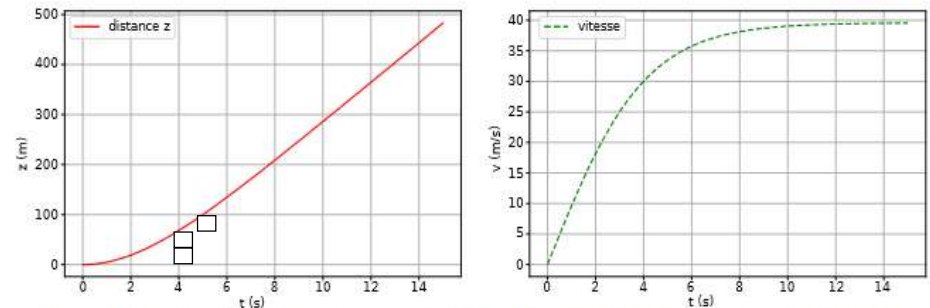
```
g = 9.8
alpha = 1.5e-3
m = 0.24
dt = 0.02 // pas d'intégration en secondes
fin = 15 // durée de la simulation en secondes

t(1) = 0 // temps initial
z(1) = 0 // position initiale
v(1) = 0 // vitesse initiale

nb_iterations = int(fin/dt)
for i=1:nb_iterations
    t(i+1) = t(i) + dt
    z(i+1) = [case 1 à compléter]
    v(i+1) = [case 2 à compléter]
end
```

Les valeurs de  $m$  et  $\alpha$  sont ici données en unités S.I. et sont valables pour un grêlon de diamètre 8 cm.

- 33 - Compléter la case 1 de l'algorithme.
- 34 - Compléter la case 2 de l'algorithme.
- 35 - Les graphiques ci-dessous sont ceux de la position  $z(t)$  et de la vitesse  $v(t)$  obtenus par l'algorithme.
- La vitesse limite obtenue est-elle compatible avec les observations?
- Déterminer la distance  $z$  au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite.



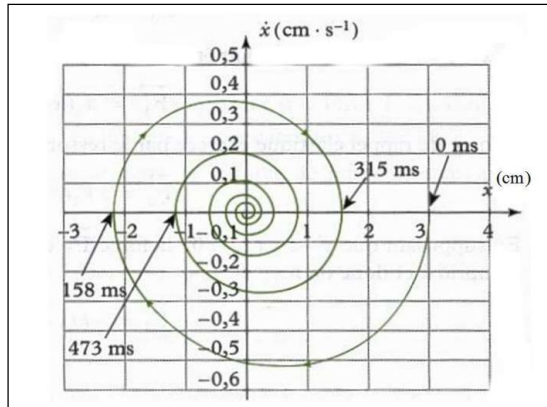
Document 9 : position  $z(t)$  et vitesse  $v(t)$  au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats de l'algorithme d'Euler ci-dessus.

## Exercice 2

On a obtenu le portrait de phase suivant lors d'un  $TP$  sur un système mécanique oscillant à un degré de liberté. Ce système est un oscillateur harmonique amorti constitué d'une masse  $m = 500g$ , d'un ressort linéaire de raideur  $k$  subissant une force de frottement linéaire  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$  avec  $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ .

On admet que l'énergie potentielle du système s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

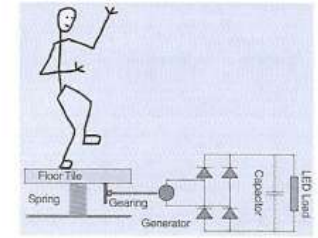
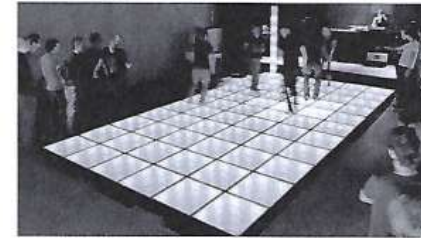


- En argumentant, déterminer la nature du régime d'oscillation.
- En utilisant le document graphique donner numériquement :
  - la position initiale  $x_0$ , la vitesse initiale  $v_0$ ,
  - la position finale  $x_f$ , la vitesse finale  $v_f$ ,
  - la pseudo-période  $T$ ,
  - le décrément logarithmique  $\delta$ .
- Pourquoi en pratique on peut conjecturer  $Q \approx 5$  ? Déduire des valeurs précédentes : la période propre  $T_0$ , la raideur  $k$  du ressort, le coefficient de frottement fluide  $\alpha$ .
- Déterminer l'énergie totale dissipée  $E_d$ .
- En argumentant, déterminer la position d'équilibre.
- Indiquer les hypothèses du modèle de l'oscillateur harmonique amorti qui font qu'on obtient une équation différentielle **linéaire** pour  $x(t)$ . Donner un exemple d'oscillateur anharmonique non linéaire amorti.
- Faire une analyse dimensionnelle du coefficient de frottement fluide. Quelle l'unité SI du coefficient de frottement fluide ? A quelle grandeur physique le coefficient de frottement fluide est-il homogène ?

## Exercice 3 (Annales ENSEA 2023)

## I Récupération de l'énergie de vibration

Les vibrations du sol, provoquées par les piétons, les véhicules ou le vent, peuvent fournir une énergie récupérable au moyen de dispositifs qui font l'objet de recherches récentes. Il existe par exemple des systèmes de dalles pour piétons qui produisent de l'énergie électrique, dalles qui sont disposées sur la chaussée ou, comme ici, sur une piste de danse (document 1).



Document 1 : exemple de dispositif de récupération d'énergie des vibrations du sol.

D'après le fabricant, chaque dalle peut générer 35 W.

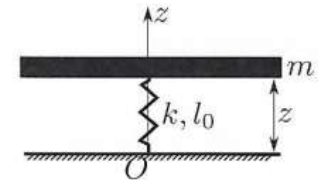
Source pour ce document et pour les valeurs exploitées dans l'énoncé : article "Power from the people" de DOI 10.1109/MIAS.2010.936649.

Nous étudions dans un premier temps la réponse mécanique de ce système (I.1, I.2), puis le principe de conversion de puissance mécanique en puissance électrique (I.3).

## I.1 Étude en régime libre

En première approximation, le système est modélisé comme une masse  $m$  (qui comprend le danseur et la dalle support) posée sur un ressort et astreinte à se déplacer verticalement. C'est donc le système du document 2 qui nous intéresse.

On note  $k$  la raideur du ressort,  $l_0$  sa longueur à vide. Le champ de pesanteur de norme  $g$  est dirigé vers le bas de la figure.

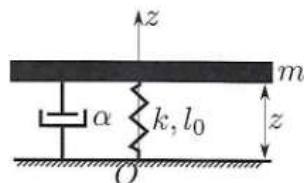


Document 2 : modèle simplifié du système réel.

- En raisonnant sur le système du document 2 et à l'aide d'un bilan des forces, établir l'expression de la position d'équilibre  $z_{eq}$  de la masse, en fonction de  $k$ ,  $l_0$ ,  $m$  et  $g$ .
- Établir ensuite l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$  lorsque le système est mis en mouvement.
- Donner l'expression générale des solutions de cette équation, sans déterminer la ou les constantes d'intégration.  
Quelle est la nature du mouvement ?

Exercice 4 (ENSEA 2018)

On constate expérimentalement que les oscillations sont amorties. Pour rendre compte de ceci, il est nécessaire d'ajouter au modèle du document 2 un amortissement. On obtient alors le modèle du document 3.



Document 3 : modèle simplifié du système réel qui prend en compte l'amortissement.

L'amortisseur exerce sur la masse une force  $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$  avec  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de la masse et  $\alpha$  une constante positive.

4 - En raisonnant sur le système du document 3, établir l'équation différentielle suivie par la variable  $z(t)$ .

5 - Mettre l'équation obtenue sous la forme :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e \quad (1)$$

avec  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $z_e$  des constantes dont on donnera les expressions en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $l_0$ ,  $g$  et  $\alpha$ .

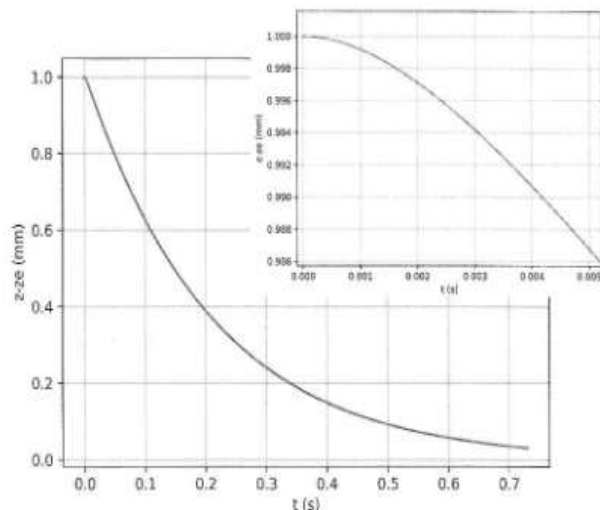
6 - Rappeler les noms des trois régimes possibles pour les solutions de ce type d'équation différentielle du second ordre, et indiquer les valeurs du facteur de qualité  $Q$  qui correspondent à chaque régime.

D'après le tableau de valeurs numériques ci-dessous, dans quel régime est-on ?

Tableau des paramètres retenus par le constructeur, et valeurs déduites pour quelques grandeurs :

$m$	$k$	$\alpha$	$\omega_0$	$Q$	$z_e - l_0$	$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$	$f_0 = \frac{1}{T_0}$
80 kg	$1,5 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$	$3,0 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$	$43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	0,11	-5 mm	0,15 s	6,9 Hz

7 - Le document 4 ci-contre montre le tracé de la solution  $z(t) - z_e$  (en mm).  
En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé



Document 4 : tracé de  $z(t) - z_e$  et zoom aux temps courts.

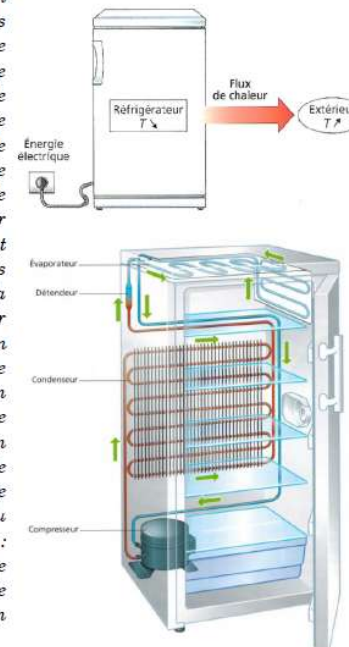
Physique en cuisine

Ce sujet est constitué de 5 parties totalement indépendantes abordant chacune un objet physique rencontré dans une cuisine.

- 1<sup>re</sup> partie : Quelques aspects thermodynamiques du réfrigérateur à compresseur

Dans cette partie, on souhaite analyser le principe de fonctionnement du réfrigérateur à compresseur en s'appuyant d'extraits du livre « La physique par les objets quotidiens » de C. Ray et J.C. Poizat.

*Le principe du réfrigérateur est simple : il assure un transfert de chaleur depuis ses compartiments internes, qui se refroidissent, vers la pièce où il se trouve, qui se réchauffe. Ce transfert consomme de l'énergie électrique. [...] Le compresseur comprime le fluide réfrigérant, alors froid et sous forme gazeuse, ce qui augmente sa température et sa pression. A la sortie du compresseur, le fluide est donc chaud et à haute pression. [...] Ce gaz chaud et à haute pression circule ensuite à travers le condenseur, où il cède de la chaleur par diffusion vers l'extérieur et subit un changement d'état : le gaz se transforme en un liquide chaud sous haute pression. La condensation (plus exactement la liquéfaction) peut se produire à température élevée car la pression est importante. [...] En poursuivant son chemin dans le circuit frigorifique, le liquide passe ensuite à travers un détendeur qui abaisse sa pression et sa température, ([...] la détente adiabatique s'effectue dans un fin capillaire). On obtient un mélange liquide-gaz à l'équilibre. Après cette chute de pression, le mélange liquide-gaz froid traverse l'évaporateur où il absorbe la chaleur de l'intérieur du réfrigérateur pour subir un second changement d'état : le liquide se met à bouillir, c'est-à-dire qu'il se vaporise. On obtient alors un gaz froid et à basse pression, qui repart dans le compresseur pour un nouveau cycle.*



A) Principe de fonctionnement du réfrigérateur à compresseur

Le réfrigérateur est supposé être une machine cyclique et ditherme. Pour un cycle complet, on note  $Q_1$  le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part du milieu extérieur,  $Q_2$  le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part de l'intérieur du réfrigérateur et  $W$  le travail de compression permettant de faire fonctionner le réfrigérateur.

- 1) Identifier le nom des organes (compresseur, détendeur, condenseur ou évaporateur) dans lesquels les transferts d'énergie  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $W$  s'opèrent.
- 2) Préciser si  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $W$  sont positifs ou négatifs.

- 3) Le compresseur met en jeu une compression rapide que l'on peut supposer adiabatique. Proposer une explication de l'augmentation de la température du gaz supposé parfait à l'issue de cette compression.
- 4) Dessiner l'allure du diagramme  $P(T)$  pour le seul équilibre liquide / gaz et préciser les phases dans chaque partie du diagramme et sur la courbe  $P(T)$ . A quelle condition une liquéfaction peut-elle s'observer à « température élevée » ?
- 5) Définir le coefficient de performance, noté  $CoP$ , du réfrigérateur puis l'exprimer en fonction de  $Q_1$  et  $Q_2$ .

On suppose le régime stationnaire atteint : la température  $T_{ext}$  de l'extérieur et la température de consigne  $T_{int}$  à l'intérieur du réfrigérateur sont constantes.

- 6) Déterminer l'expression du coefficient de performance maximal du réfrigérateur, noté  $CoP_c$ , en fonction de  $T_{int}$  et  $T_{ext}$ .
- 7) Calculer ce  $CoP_c$  si  $T_{ext} = 25\text{ °C}$  et  $T_{int} = 5\text{ °C}$ .

#### B) Etude du cycle du fluide réfrigérant dans un diagramme entropique $T(s)$

Nous allons étudier plus précisément les différentes transformations que le fluide réfrigérant subit. L'écoulement du fluide réfrigérant est stationnaire, de débit massique  $D_m$ . Les variations d'énergies cinétique et potentielle du fluide seront négligées. Nous supposons également que le fluide réfrigérant décrit le cycle suivant (on note  $\{T_i, P_i\}$  le couple température-pressure relatif à l'état  $i$  du fluide) :

- Avant d'entrer dans le compresseur, le fluide est un gaz surchauffé (état  $A\{T_A, P_A\}$ ). Le compresseur impose une compression adiabatique et irréversible. Le fluide reste à l'état gazeux (état  $B\{T_B, P_B\}$ ).
- Le fluide circule ensuite dans le condenseur où il opère un refroidissement isobare puis une liquéfaction complète isobare (et donc isotherme) à la pression  $P_B$ . On obtient un liquide saturant (état  $C\{T_C, P_C\}$ ).
- Le liquide subit une détente isenthalpique (détente de type Joule-Thomson sans travail indiqué et sans transfert thermique) faisant apparaître un mélange diphasé après avoir traversé le détendeur (état  $D\{T_D, P_D\}$ ).
- Le fluide pénètre dans l'évaporateur et évolue de manière isobare jusqu'à l'état  $A$ .

On prendra les valeurs suivantes :  $P_A = 2\text{ bar}$ ,  $P_B = 7\text{ bar}$ ,  $T_A = 5\text{ °C}$ ,  $T_B = 55\text{ °C}$  et  $D_m = 10^{-2}\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Une tolérance de  $\pm 2\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  sur la lecture de l'enthalpie massique sera acceptée. Une tolérance de  $\pm 1\text{ °C}$  sur la lecture des températures sera acceptée.

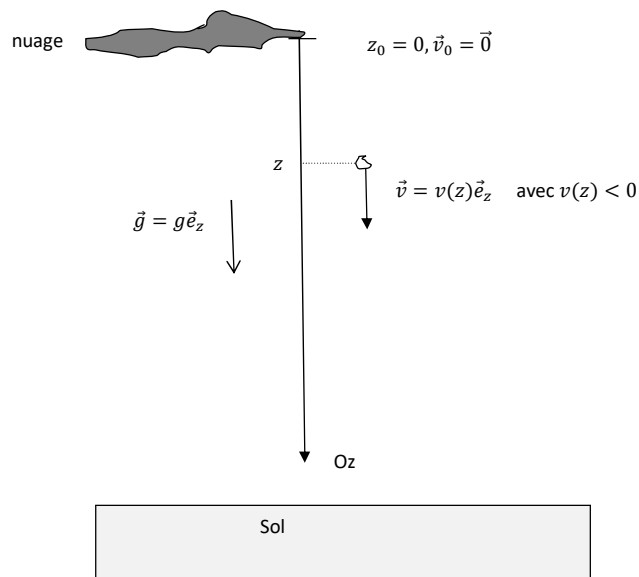
On rappelle, en tenant compte de nos hypothèses de travail, le premier principe de la thermodynamique appliqué à un fluide en écoulement dans une conduite, recevant une puissance thermique  $P_{th}$  et une puissance mécanique  $P_{mecc}$  (mise en jeu par les éventuelles parties mobiles d'une machine présente dans la conduite) avec  $h_e$  et  $h_s$  les enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie de la conduite :

$$D_m(h_s - h_e) = P_{th} + P_{mecc}$$

- 8) Repérer sur le diagramme entropique fourni en document-réponse les domaines liquide, diphasique et gazeux.
- 9) Reporter la position des points  $A, B, C$  et  $D$  sur le document-réponse fourni en annexe et à rendre avec la copie.
- 10) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température  $T_l$  de liquéfaction du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.
- 11) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température  $T_v$  de vaporisation du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.

## Correction exercice 1

28. On fait un schéma en tenant compte des précisions de l'énoncé.



On pose  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$  donc  $E_p(z) = -\int mgdz + C = -mgz + C$ . D'après l'énoncé  $E_p(0) = 0$  donc  $C = 0$

$$E_p(z) = -mgz$$

29. En l'absence de frottement le grêlon est un système conservatif donc son énergie mécanique est constante :

$$E_m = E_{m0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgz_0 = 0 \Leftrightarrow v^2 = 2gz \Leftrightarrow |v| = \sqrt{2gz}$$

30. Pour  $z = 1000m$  on obtient :

$$|v| = \sqrt{2 * 10 * 1000} = \sqrt{2} * 100 \approx 140m \cdot s^{-1}$$

$$|v| \approx 140 * 3,6 \approx 500km \cdot h^{-1}$$

**On obtient une vitesse 5 fois plus grande que la vitesse citée dans l'énoncé, le modèle n'est vraiment pas satisfaisant, il faut tenir compte des forces de frottements.**

31. On applique la seconde loi de Newton à un grêlon dans un référentiel terrestre supposé galiléen :

$$mv'(t)\vec{e}_z = mg\vec{e}_z - \alpha v^2(t)\vec{e}_z$$

$$mv'(t) = mg - \alpha v^2(t)$$

L'équation différentielle obtenue est non linéaire à cause du terme en  $v^2(t)$ .

32. Pour une solution constante  $v(t) = v_{lim}$  on a  $v'(t) = 0$  :

$$mg - \alpha v_{lim}^2 = 0 \Leftrightarrow v_{lim}^2 = \frac{mg}{\alpha} \Leftrightarrow |v_{lim}| = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}} \quad (\text{rappel } \sqrt{x^2} = |x|)$$

33. De l'instant  $t(i)$  à l'instant  $t(i+1)$  il s'est écoulé un temps  $dt$ , en  $dt$  seconde le grêlon a parcouru la distance  $v(i)dt$  et donc sa position  $z(i+1)$  à l'instant  $t(i+1)$  s'écrit :

$$\text{case 1 : } z(i+1) = z(i) + v(i)dt$$

34. D'après la question 31, l'accélération du grêlon s'écrit :

$$v'(t) = g - \frac{\alpha v^2(t)}{m}$$

Donc l'accélération  $a(i)$  du grêlon à l'instant  $i$  dans le programme s'écrit :

$$a(i) = g - \text{alpha} * v(i) * v(i)/m$$

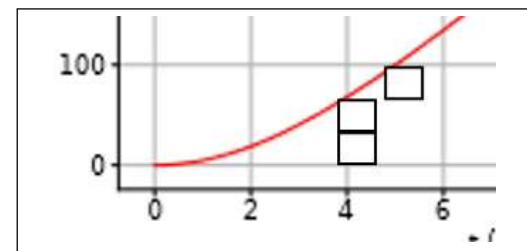
$$\text{case 2 : } v(i+1) = v(i) + dt * (g - \text{alpha} * v(i) * v(i)/m)$$

On a utilisé la discrétisation de l'équation  $a(t) = \frac{dv}{dt}$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{v(t+dt) - v(t)}{t+dt - t} \Leftrightarrow v(t+dt) = v(t) + a(t)dt$$

35. La vitesse limite obtenue par simulation est de  $40m \cdot s^{-1}$  soit environ  $150km \cdot h^{-1}$ . Ce résultat est plus proche de la vitesse réelle (de l'ordre de  $100km \cdot h^{-1}$ ) que l'estimation obtenue ( $500km \cdot h^{-1}$ ) dans le modèle sans frottement (modèle à l'ordre 0). Pour autant il faudrait ajuster l'un des paramètres (alpha par exemple ou encore l'exposant de la vitesse dans l'expression de la force de frottement ou les deux !) afin d'obtenir une estimation de la vitesse limite encore plus proche de la valeur réelle.

La simulation montre qu'au bout de 4 secondes le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite (soit 30m/s) on lit sur le graphe  $z = z(t)$  qu'au bout de 4 seconde le grêlon est à l'altitude de 70 m environ ( $\approx 2/3 * 100m$ )



## Correction exercice 2

1. L'oscillateur passe plusieurs fois par la position  $x = 0$  avec des vitesses en ces points qui diminuent. L'oscillateur a un régime d'oscillation pseudopériodique.

2. Par lecture :

$$x_0 = 3\text{cm}, v_0 = 0, x_f = 0, v_f = 0, T = 315\text{ms}$$

Par calcul :

$$\delta = \ln\left(\frac{x_0}{x_1}\right) = \ln\left(\frac{3}{1,6}\right) = 0,63$$

3. On observe pour le régime d'oscillation amorti 5 oscillations.  $Q \approx 5$ . D'après le cours :

$$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$$

$\sigma$  étant le coefficient d'amortissement.

On obtient :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi T}{\delta Q} = 0,31\text{s}$$

$$k = m\omega_0^2 = 0,5 \left(\frac{2\pi}{0,31}\right)^2 = 0,21\text{kN} \cdot \text{m}^{-1}$$

Le coefficient de frottement s'écrit :

$$\alpha = \frac{m\omega_0}{Q} = \frac{0,5 * 2\pi}{5 * 0,31} = 2,0\text{N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$$

4. L'énergie totale dissipée est égale à la variation d'énergie mécanique entre l'instant initial et l'instant final théoriquement infini.

$$E_d = \Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 = 0 + 0 - 0 - \frac{1}{2} * 205 * 0,03^2 = 92\text{mJ}$$

5. La position d'équilibre stable est la position d'énergie potentielle minimale ( $\frac{dE_p}{dx} = 0 \Leftrightarrow kx = 0$ ) soit  $x = 0$ .

6. On suppose que la force de frottement est linéaire en vitesse (en l'occurrence proportionnelle à la vitesse) et que la tension du ressort est linéaire en l'allongement du ressort.

En dehors du domaine linéaire de Hooke et pour des vitesses « importantes » on aboutit à une équation non linéaire. Par exemple :

$$x'' + ax'^2 + bx + cx^2 = 0$$

Le pendule simple est un oscillateur anharmonique non linéaire.

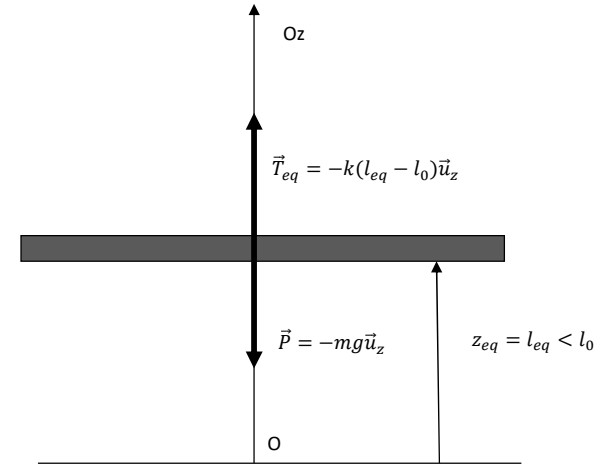
7. On a :

$$[f] = [v][\alpha] \Leftrightarrow [\alpha] = \frac{[f]}{[v]} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

$\alpha$  s'exprime en  $\text{kg/s}$  dans le système SI.  $\alpha$  est homogène à un débit massique.

## Correction exercice 3

1. Le ressort est en compression à l'équilibre, on doit donc obtenir  $z_{eq} < l_0$ .



On applique la première loi de Newton à la masse  $m$  dans un référentiel galiléen :

$$\vec{P} + \vec{T}_{eq} = \vec{0}, \text{ sur Oz : } -mg - k(z_{eq} - l_0) = 0 \Leftrightarrow z_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

2. On applique la seconde loi de Newton à la masse  $m$  dans un référentiel terrestre supposé galiléen

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$m\ddot{z}(t)\vec{u}_z = -mg\vec{u}_z - k(z - l_0)\vec{u}_z,$$

$$\text{Sur Oz : } m\ddot{z}(t) = -mg - k(z(t) - l_0) \quad (1), \quad \text{à l'équilibre } -mg - k(z_{eq} - l_0) = 0 \quad (2)$$

Par soustraction des équations 1 et 2 on obtient :

$$m\ddot{z}(t) = -k(z(t) - z_{eq}) \Leftrightarrow \ddot{z}(t) = -\omega_0^2(z(t) - z_{eq}) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique.

3. On pose  $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ ,  $Z$  vérifie l'équation  $\ddot{Z}(t) = -\omega_0^2 Z(t)$  donc la solution générale s'écrit :

$$Z(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$z(t) = z_{eq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Le mouvement est oscillatoire sinusoïdal sans amortissement, c'est le modèle de l'oscillateur harmonique à une dimension.

4. Le raisonnement est identique au raisonnement de la question 2 en tenant compte en plus d'une force de frottement fluide linéaire  $\vec{F} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}(t)\vec{u}_z$ , on obtient :

$$m\ddot{z}(t) = -mg - k(z(t) - l_0) - \alpha\dot{z}$$

$$0 = -mg - k(z_{eq} - l_0) \text{ (équilibre)}$$

5. Par différence des deux équations précédentes, on obtient :

$$m\ddot{z}(t) = -k(z(t) - z_{eq}) - \alpha\dot{z}$$

$$\ddot{z}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) = \frac{k}{m}z_{eq}$$

On pose :

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

6. On distingue 3 régimes :

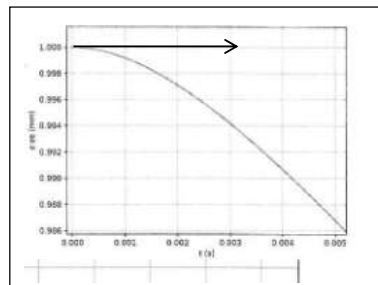
- Le régime aperiodique obtenu pour un frottement 'important' ( $Q < 1/2$ )
- Le régime critique obtenu en frottement critique ( $Q = 1/2$ )
- Le régime pseudo periodique obtenu pour un frottement 'faible' ( $Q > 1/2$ )

**Rappel :**  $Q$  est inversement proportionnel au coefficient de frottement : si les frottements augmentent alors la valeur de  $Q$  diminue.

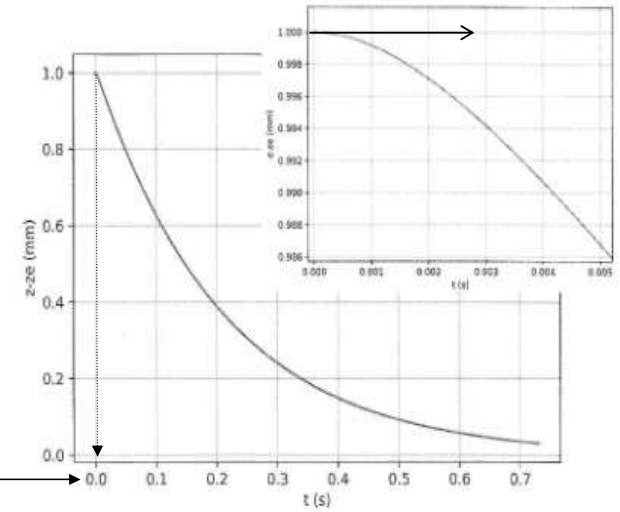
On détermine le régime d'oscillation en comparant  $Q$  à  $1/2$ . L'énoncé donne  $Q = 0,11 < 1/2$  donc le système est en régime aperiodique.

7. Sur le graphique on lit  $z(0) - z_e = 1mm$  donc  $z(0) = z_e(\text{en mm}) + 1mm$ .

On observe sur le graphique agrandi que la tangente initiale à la courbe représentative de  $z$  est horizontale donc  $v_0 = 0$ .



7 - Le document 4 ci-contre montre le tracé de la solution  $z(t) - z_e$ . En déduire les conditions initiales qui ont été choisies pour ce tracé.



$$z(0) - z_e = 0$$

$$\Leftrightarrow z(0) = z_e$$

Document 4 : tracé de  $z(t) - z_e$  et zoom aux temps courts.

## Correction exercice 4

## A) Principe de fonctionnement du réfrigérateur à compresseur

Le réfrigérateur est supposé être une machine cyclique et ditherme. Pour un cycle complet, on note  $Q_1$  le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part du milieu extérieur,  $Q_2$  le transfert thermique reçu par le fluide réfrigérant de la part de l'intérieur du réfrigérateur et  $W$  le travail de compression permettant de faire fonctionner le réfrigérateur.

- 1) Identifier le nom des organes (compresseur, détendeur, condenseur ou évaporateur) dans lesquels les transferts d'énergie  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $W$  s'opèrent.
- 2) Préciser si  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $W$  sont positifs ou négatifs.

Le transfert  $Q_1$  ( $Q_1 < 0$ ) s'effectue lors de la traversée du condenseur : le fluide passe de l'état vapeur à l'état liquide en cédant de l'énergie.

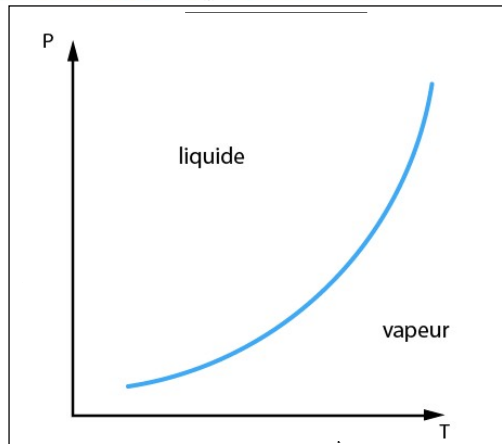
Le transfert  $Q_2$  ( $Q_2 > 0$ ) s'effectue lors de la traversée de l'évaporateur : le fluide passe de l'état liquide à l'état vapeur en recevant de l'énergie.  $W$  est reçu ( $W > 0$ ) par le fluide dans le compresseur. Cette énergie mécanique permet au fluide de circuler.

- 3) Le compresseur met en jeu une compression rapide que l'on peut supposer adiabatique. Proposer une explication de l'augmentation de la température du gaz supposé parfait à l'issue de cette compression.

Pour une transformation adiabatique et pour un gaz parfait, le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = W \Leftrightarrow nC_{vm}\Delta T = W > 0$$

- 4) Dessiner l'allure du diagramme  $P(T)$  pour le seul équilibre liquide / gaz et préciser les phases dans chaque partie du diagramme et sur la courbe  $P(T)$ . A quelle condition une liquéfaction peut-elle s'observer à « température élevée » ?



La courbe de vaporisation d'un corps pur est représentée sur ce schéma. Cette courbe est limitée par le point triple et le point critique du corps pur. La courbe de vaporisation indique pour une température de vaporisation donnée qu'elle est la pression de vaporisation associée.

Un point situé sur la courbe de vaporisation, d'équation  $P_{vap} = P(T_{vap})$ , représente un système diphasique en équilibre  $liq \rightleftharpoons vap$ .

Une liquéfaction peut s'observer à « température élevée » si la pression est « élevée ».

- 5) Définir le coefficient de performance, noté  $CoP$ , du réfrigérateur puis l'exprimer en fonction de  $Q_1$  et  $Q_2$ .

L'énergie utile dans un réfrigérateur est le transfert thermique  $Q_2$  prélevée à l'intérieur du réfrigérateur.

$$CoP = \frac{Q_2}{W}$$

Le premier principe des systèmes fermés appliqué au fluide sur un cycle s'écrit :

$$\Delta U = 0 = W + Q_1 + Q_2$$

$$CoP = -\frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

On suppose le régime stationnaire atteint : la température  $T_{ext}$  de l'extérieur et la température de consigne  $T_{int}$  à l'intérieur du réfrigérateur sont constantes.

- 6) Déterminer l'expression du coefficient de performance maximal du réfrigérateur, noté  $CoP_c$ , en fonction de  $T_{int}$  et  $T_{ext}$ .
- 7) Calculer ce  $CoP_c$  si  $T_{ext} = 25^\circ\text{C}$  et  $T_{int} = 5^\circ\text{C}$ .

Le coefficient de performance est maximal lorsque le cycle est réversible (absence de frottement, de conduction thermique,...). Le second principe appliqué au fluide sur un cycle s'écrit :

$$\Delta S = 0 = S_{echangée} + S_{créée}$$

Pour un cycle réversible  $S_{créée} = 0$ . Pour des sources chaude et froide à températures constantes :

$$S_{echangée} = \int_{\text{temps de traversée du condenseur}} \frac{\delta Q_1}{T_{ext}} + \int_{\text{temps de traversée de l'évaporateur}} \frac{\delta Q_2}{T_{int}}$$

$$S_{echangée} = \frac{1}{T_{ext}} \int_{\text{temps de traversée du condenseur}} \delta Q_1 + \frac{1}{T_{int}} \int_{\text{temps de traversée de l'évaporateur}} \delta Q_2$$

$$S_{echangée} = \frac{Q_1}{T_{ext}} + \frac{Q_2}{T_{int}}$$

On obtient (l'égalité de Clausius) :

$$\frac{Q_1}{T_{ext}} + \frac{Q_2}{T_{int}} = 0$$

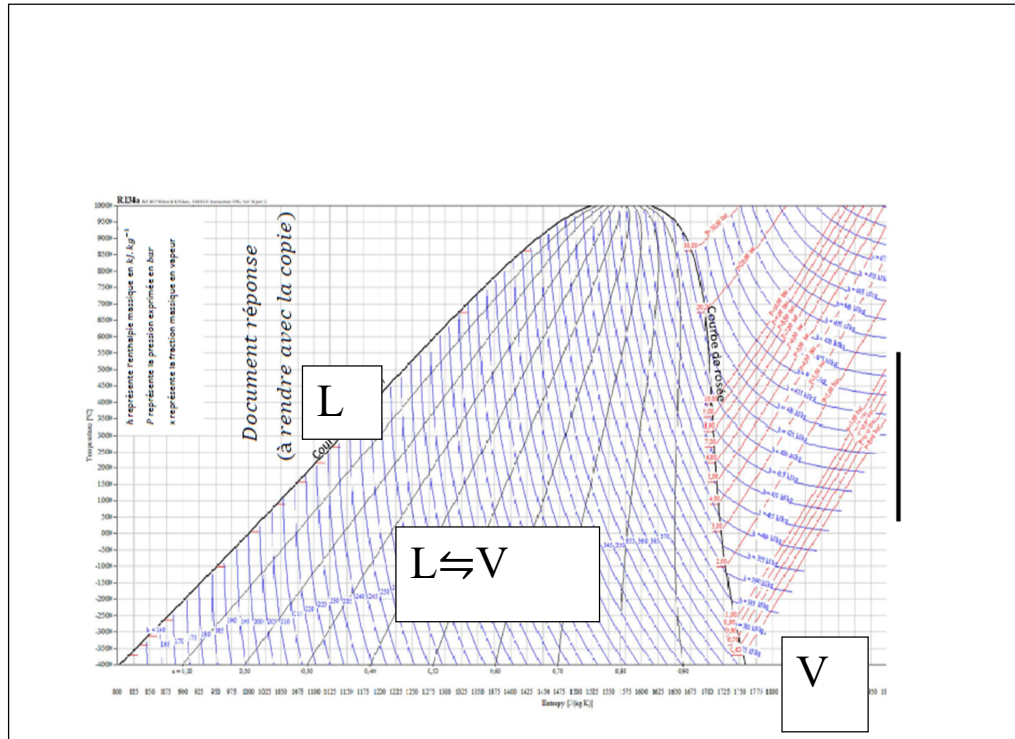
Le  $CoP_{max}$  s'écrit :

$$CoP_{max} = \frac{-1}{1 + \frac{Q_1}{Q_2}} = \frac{-1}{1 - \frac{T_{ext}}{T_{int}}} = \frac{-T_{int}}{T_{int} - T_{ext}} = \frac{T_{int}}{T_{ext} - T_{int}}$$

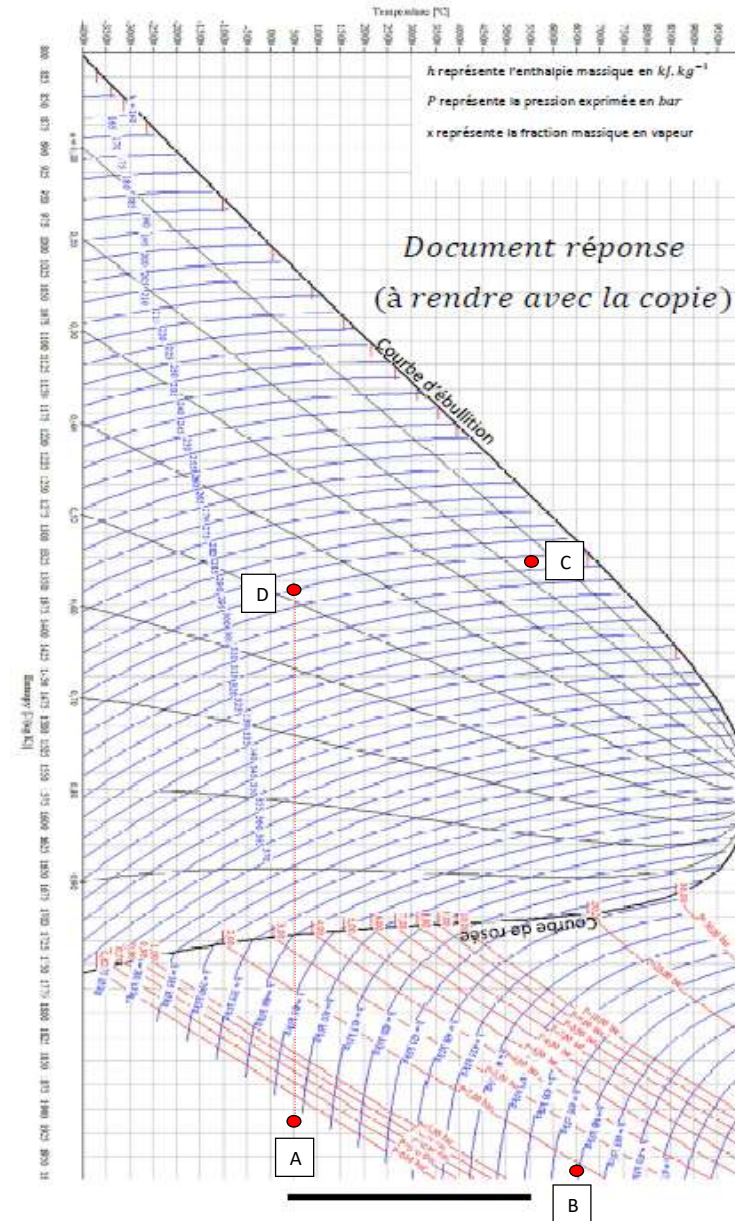
AN ATTENTION LES TEMPERATURES EN K :  $CoP_{max} = \frac{278}{298 - 278} \approx 14$

B) Etude du cycle du fluide réfrigérant dans un diagramme entropique  $T(s)$

Nous allons étudier plus précisément les différentes transformations que le fluide réfrigérant subit. L'écoulement du fluide réfrigérant est stationnaire, de débit massique  $D_m$ . Les variations d'énergies cinétique et potentielle du fluide seront négligées. Nous supposons également que le fluide réfrigérant décrit le cycle suivant (on note  $\{T_i, P_i\}$  le couple température-pression relatif à l'état  $i$  du fluide) :



9) Reporter la position des points  $A, B, C$  et  $D$  sur le document-réponse fourni en annexe et à rendre avec la copie.



Le point A s'obtient par intersection de la droite de température  $t = 5^\circ\text{C}$  et de la courbe isobare  $P = 2,00\text{bar}$ . Le point B s'obtient par intersection de la droite de température  $t = 55^\circ\text{C}$  et de la courbe isobare  $P = 7,00\text{bar}$ . Le point C s'obtient par intersection de la droite de température  $t = 55^\circ\text{C}$  et de la courbe d'ébullition car l'état du fluide est liquide saturant.

Le point D s'obtient par intersection de l'isenthalpe  $h = \text{constante} = h_c = 280 \text{ kJ/kg}$  de la courbe isobare  $P = 2,00 \text{ bar}$ .

- 10) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température  $T_l$  de liquéfaction du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.
- 11) Donner, par lecture sur le diagramme entropique, la température  $T_v$  de vaporisation du fluide réfrigérant observée pour le cycle étudié.

**La température de liquéfaction est  $T_l = 55^\circ\text{C}$ . La température de vaporisation est  $T_v = 5^\circ\text{C}$ .**