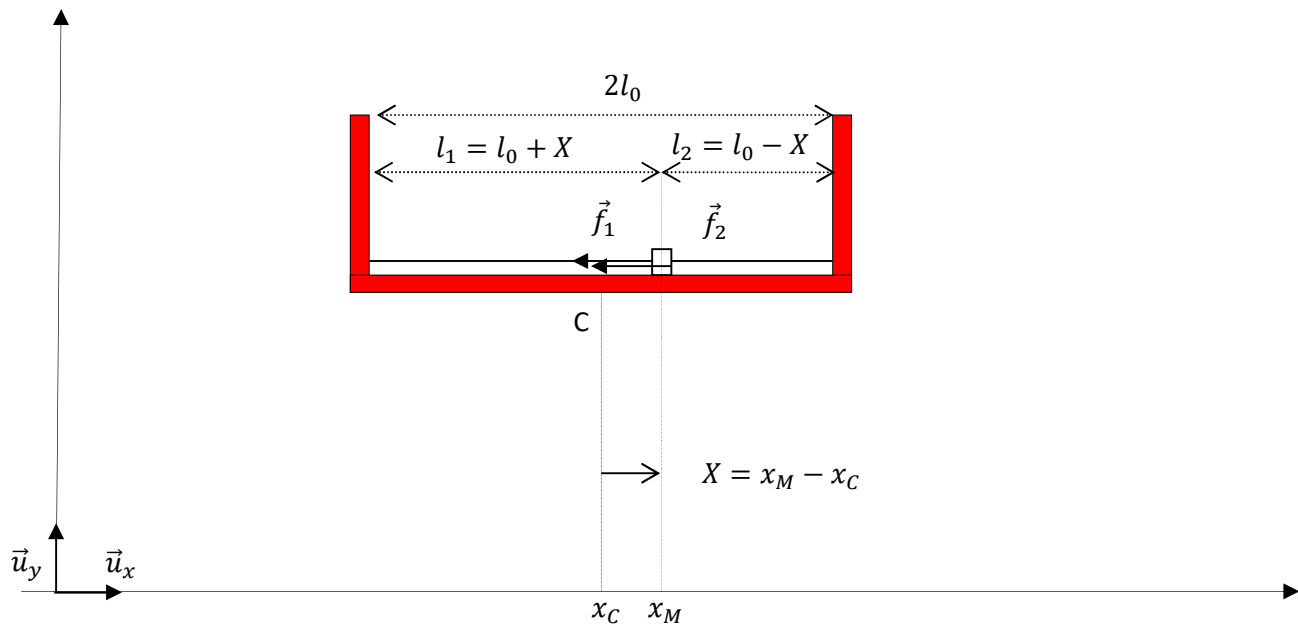


1.



Sur le schéma (On a décalé  $\vec{f}_2$  pour mieux la visualiser par rapport à  $\vec{f}_1$ )

- le ressort 1 est allongé :  $\vec{f}_1$  est orienté vers l'intérieur du ressort 1.
- le ressort 2 est comprimé :  $\vec{f}_2$  est orienté vers l'extérieur du ressort 2.

$\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  sont de même sens.

En supposant que la loi de Hookes est valide :

$$\vec{f}_1 = -k(l_1 - l_0)\vec{u}_x = -kX\vec{u}_x$$

$$\vec{f}_2 = +k(l_2 - l_0)\vec{u}_x = -kX\vec{u}_x$$

2. On applique la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique) à m dans le référentiel terrestre  $R_T$  supposé galiléen :

$$m\ddot{x}_M\vec{u}_x = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \vec{P} + \vec{R}$$

Attention  $x_M$  est l'abscisse de la masse m dans le repère orthonormé fixe dans le référentiel terrestre. L'ordonnée de la masse m n'intervient pas dans l'équation du mouvement car l'accéléromètre a un mouvement de translation selon Ox et donc pas de mouvement selon Oy donc la dérivée seconde de  $y_M$  est nulle.

En projection sur Ox :

$$m\ddot{x}_M = -2kX - \alpha(\dot{x}_M - \dot{x}_C) = -2kX - \alpha\dot{X}$$

Or  $x_M = X + x_C$  donc  $\ddot{x}_M = \ddot{X} + \ddot{x}_C = \ddot{X} + a_c$  donc :

$$m\ddot{X} + ma_c = -2kX - \alpha\dot{X}$$

$$m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + 2kX = -ma_c$$

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{2k}{m}X = -a_c \text{ soit } \ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_c$$

Par identification :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \text{ et } \omega_0 = \left(\frac{2k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3.  $\omega_0$  est la pulsation propre du système masse ressort en  $s^{-1}$ , c'est la pulsation de vibration du système masse - ressort en l'absence de frottement (approximation de l'oscillateur harmonique).

$Q = m\omega_0/\alpha$  est sans unité ( $\ddot{X}$  et  $\omega_0\dot{X}$  ont la même dimension donc  $Q$  est sans dimension)  $Q$  est inversement proportionnel au coefficient de frottement  $\alpha$  : une valeur élevée de  $Q$  traduit un frottement faible.

4.  $\underline{X}$  et  $\underline{a_c}$  vérifient la même équation que  $X$  et  $a_c$  :

$$\underline{\ddot{X}} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{X}} + \omega_0^2\underline{X} = -\underline{a_c}$$

$$\underline{X}(-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2) = -\underline{a_c}$$

$$\omega_0^2\underline{X}\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega_0}{Q}\frac{\omega}{\omega_0^2} + 1\right) = -\underline{a_c}, \quad \omega_0^2\underline{X}(1 - u^2 + j\frac{1}{Q}u) = -\underline{a_c}$$

En prenant le module :

$$\omega_0^2|\underline{X}|\left|1 - u^2 + j\frac{1}{Q}u\right| = |-\underline{a_c}|$$

$$X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2\left((1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

5. Il y a résonance en élongation si  $X_m$  est maximal,  $X_m$  est maximal si  $j(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$  est minimale c'est-à-dire nécessairement si la dérivée de  $j(u)$  s'annule :

$$j'(u) = 2(1 - u^2)(1 - u^2)' + \frac{2u}{Q^2} = 2(1 - u^2)(-2u) + \frac{2u}{Q^2} = 2u(2u^2 - 2 + \frac{1}{Q^2})$$

$$j'(u) = 0 \Leftrightarrow (u = 0 \text{ ou } u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}) \Leftrightarrow (u = 0 \text{ ou } \begin{cases} u = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \end{cases})$$

$$j'(u) = 0 \Leftrightarrow (u = 0 \text{ ou } \begin{cases} u = \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases})$$

On observe un phénomène de résonance, si les frottements ne sont pas trop importants ( $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), à la

pulsation  $\omega_r = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  soit à la fréquence :

$$f_r = f_0\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

6. Application numérique :

$$f_r = 5kHz\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 5kHz$$

7. Pour des fréquences  $f \ll f_r = f_0$  on a :

$$u = \frac{f}{f_r} \ll 1$$

Alors :

$$X_m = \frac{a_m}{\omega_0^2 \left( (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{a_m}{\omega_0^2}$$

Par identification :

$$K = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{2k}$$

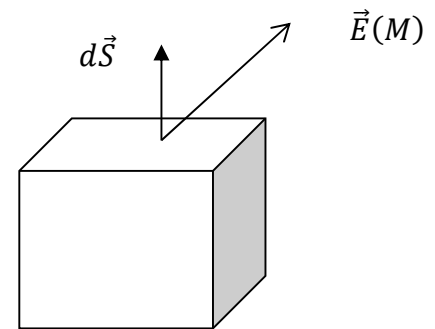
8. On a :

$$X_m = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{g}{4\pi^2 f_0^2} = \frac{10}{4 \cdot 10 \cdot (5 \cdot 10^3)^2} = \frac{1}{4 \cdot 25 \cdot 10^6} = 10^{-8} m = 10 nm$$

L'énoncé impose dans cette question une accélération  $a_c$  constante alors que les calculs précédents ont été réalisés avec une accélération  $a_c = a_m \cos(\omega t)$  : c'est donc pour une pulsation  $\omega = 0$  que ce calcul peut être réalisé.

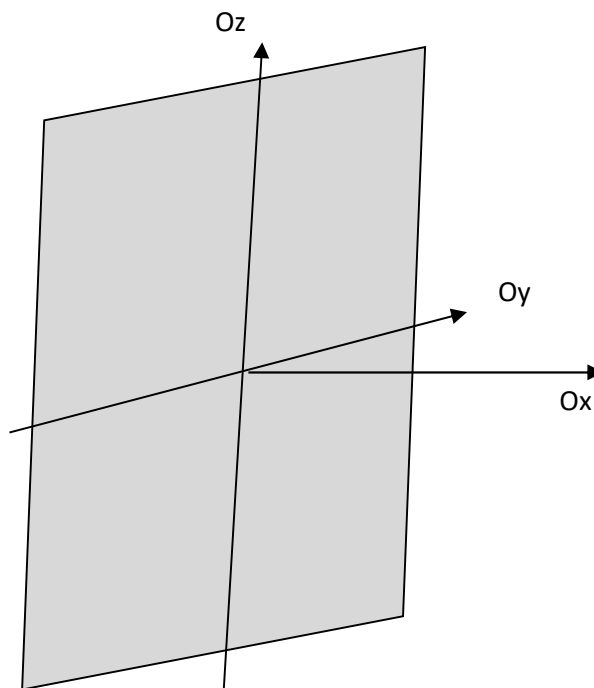
9. Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée  $S$  est égale au quotient de la charge électrique intérieure à  $S$  par la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  :

$$\oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int \text{ à } S}}{\epsilon_0}$$



$q_{int \text{ à } S}$  en C,  $E(M)$  en  $V \cdot m^{-1}$ ,  $dS$  en  $m^2$  et  $\epsilon_0$  en  $F \cdot m^{-1}$ .

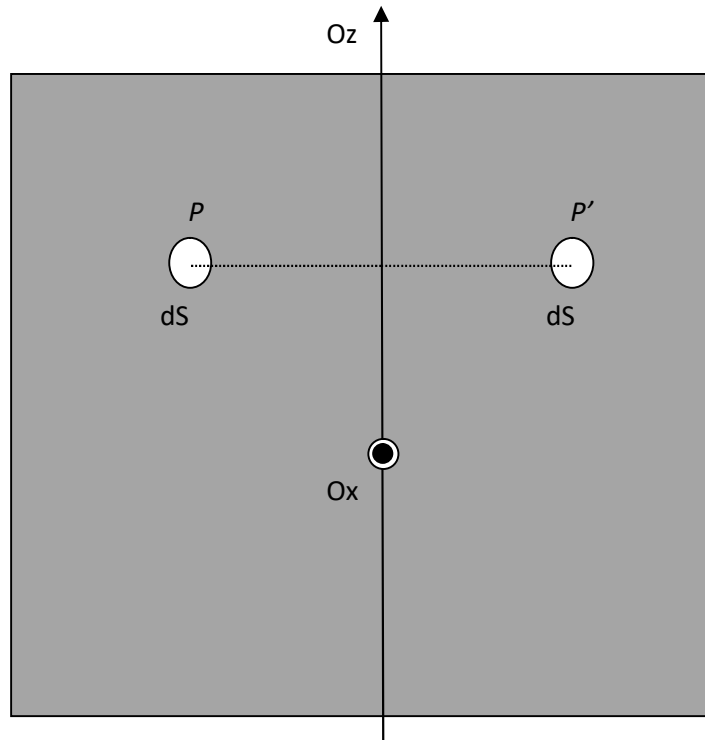
10. On modélise l'électrode 1 par un plan (Oyz) uniformément chargé



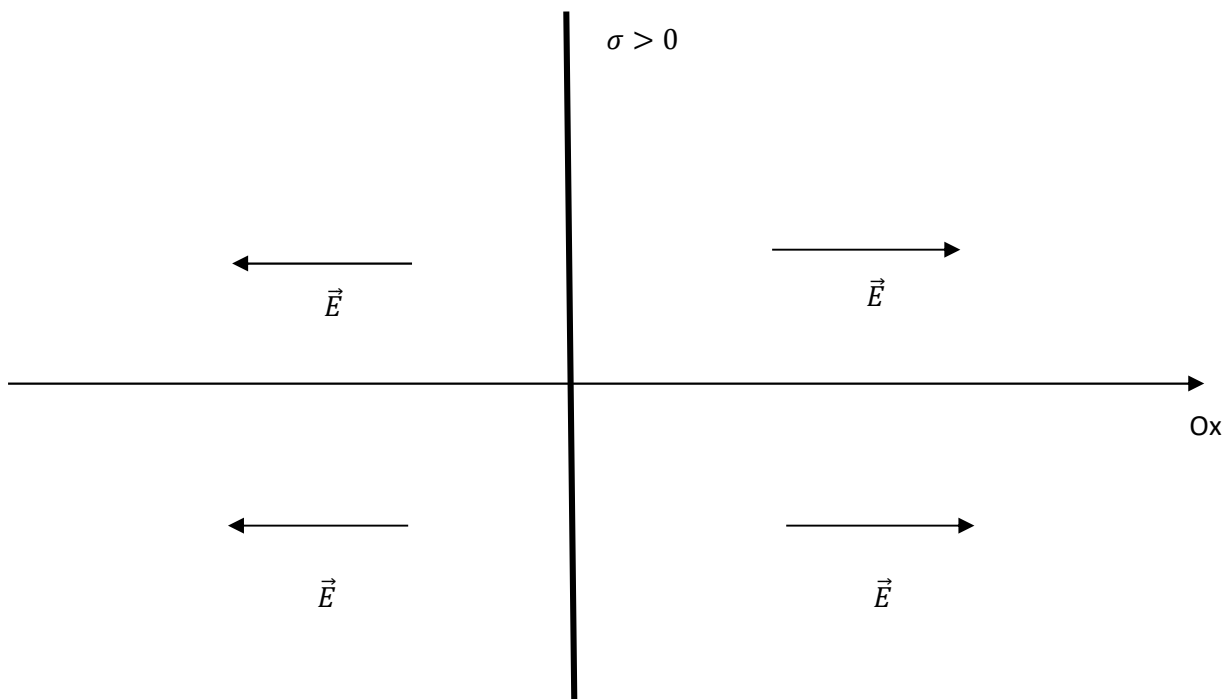
Le plan **uniformément** chargé est invariant par translation selon ses axes Oy et Oz donc le champ  $\vec{E}(M) = \vec{E}(x)$

Les plans  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  et  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie du plan chargé donc  $\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$

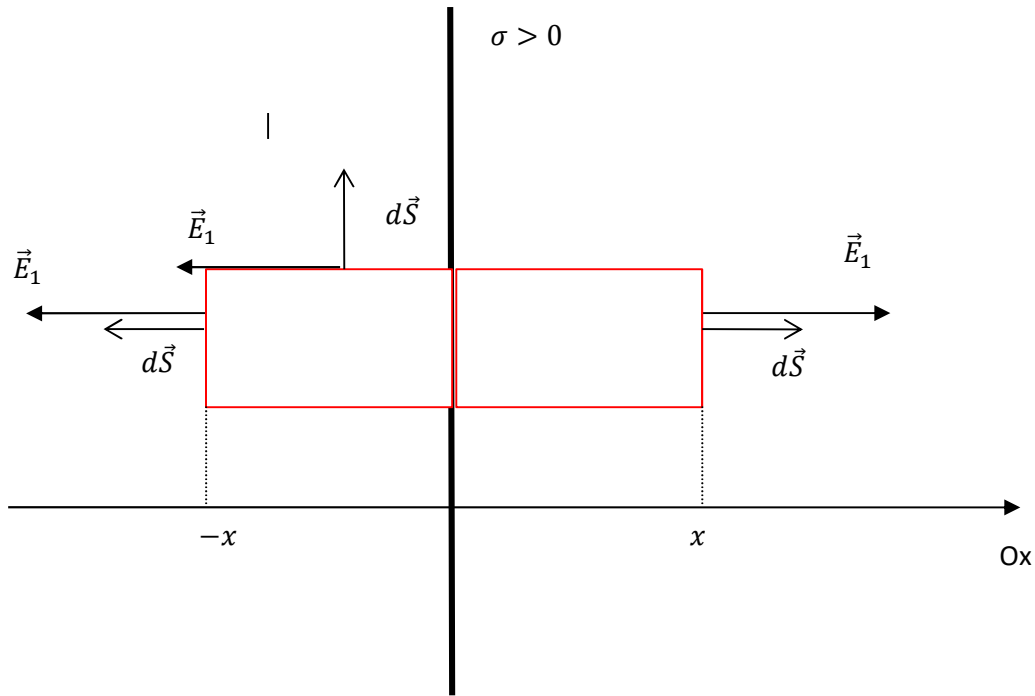
On considère par exemple une surface  $dS$  centrée en P portant une charge  $dq = \sigma(P)dS$ , la surface symétrique de  $dS$  par rapport au plan Oxz porte une charge  $dq' = \sigma(P')dS$ . Le plan est uniformément chargé donc  $\sigma(P') = \sigma(P)$  et  $dq' = dq$  : le plan Oxz est un plan de symétrie des charges.



Le schéma ci-dessous représente le champ créé pour le plan chargé positivement ( $\sigma > 0$ ) dans tout l'espace.



On applique le théorème de Gauss sur un cylindre fermé par deux disques placés symétriquement au plan chargé :



Calcul du flux du champ électrique (sur le cylindre  $\vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 0$ )

$$\oiint_{2\text{disques} \cup \text{cylindr}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{1\text{disque}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{cylindre}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S} = 2E_1(x)S$$

Calcul de la charge intérieure au cylindre fermé : le cylindre fermé ‘découpe une surface S contenant la charge  $q_{int} \text{ à } S = \sigma S$

On applique le théorème de Gauss :

$$2E_1(x) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

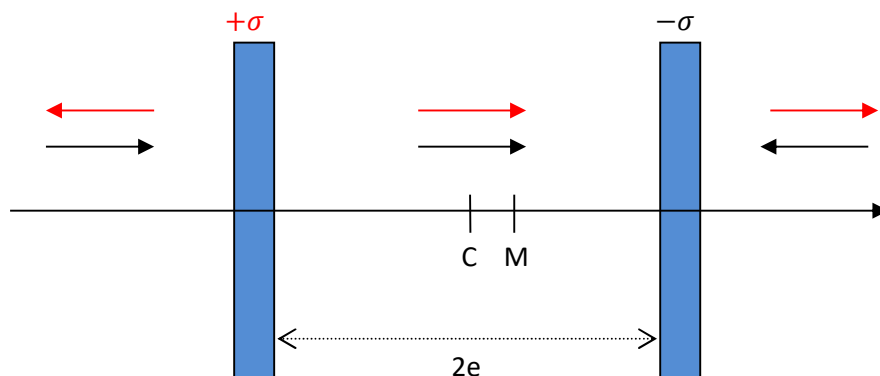
Pour un point M dans le demi-espace à droite de l'électrode 1

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

11. DE même on montre que le plan chargé  $-\sigma$  crée un champ électrique à gauche un champ  $\vec{E}_{-\sigma} = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$

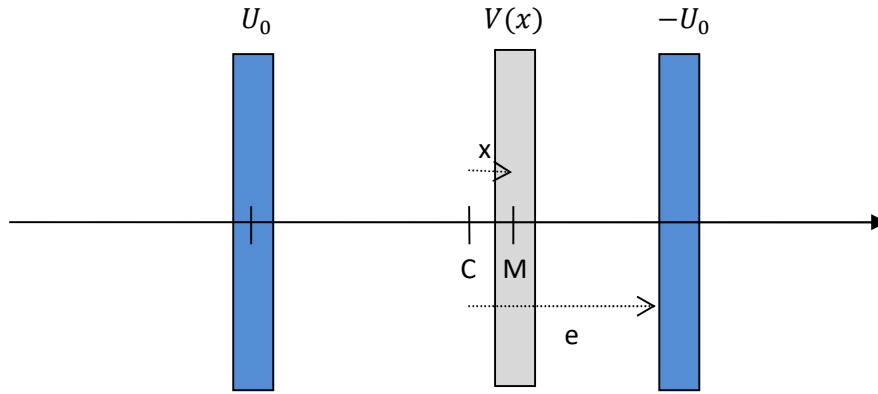
Par superposition :  $\vec{E} = \vec{E}_{+\sigma} + \vec{E}_{-\sigma}$ , le champ résultant est uniforme entre les deux électrodes :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$



Nous avons dessiné les champs créés par les deux électrodes dans tout l'espace : le champ est nul à l'extérieur du condensateur et uniforme entre les armatures du condensateur.

12. On détermine généralement le potentiel entre les deux électrodes en utilisant la relation  $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x$  et les conditions aux limites  $V(e) = -U_0$  et  $V(-e) = U_0$ .



Cependant l'énoncé donnant l'expression du potentiel, il suffit de montrer que cette expression vérifie les conditions aux limites et la relation  $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x$  :

- Vérification des conditions aux limites :

$$V(e) = -\frac{U_0}{e}e = -U_0 \text{ et } V(-e) = -\frac{U_0}{e}(-e) = U_0$$

- Vérification de la relation  $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x = -\frac{U_0}{e}\vec{u}_x$  :

Le champ est uniforme entre les deux électrodes :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x \Leftrightarrow dV = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}dx \Leftrightarrow V(x) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}x + K$$

$$V(-e) - V(e) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(-e) - \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0}e\right) \Leftrightarrow \frac{U_0}{e} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u}_x = \frac{U_0}{e}\vec{u}_x$$

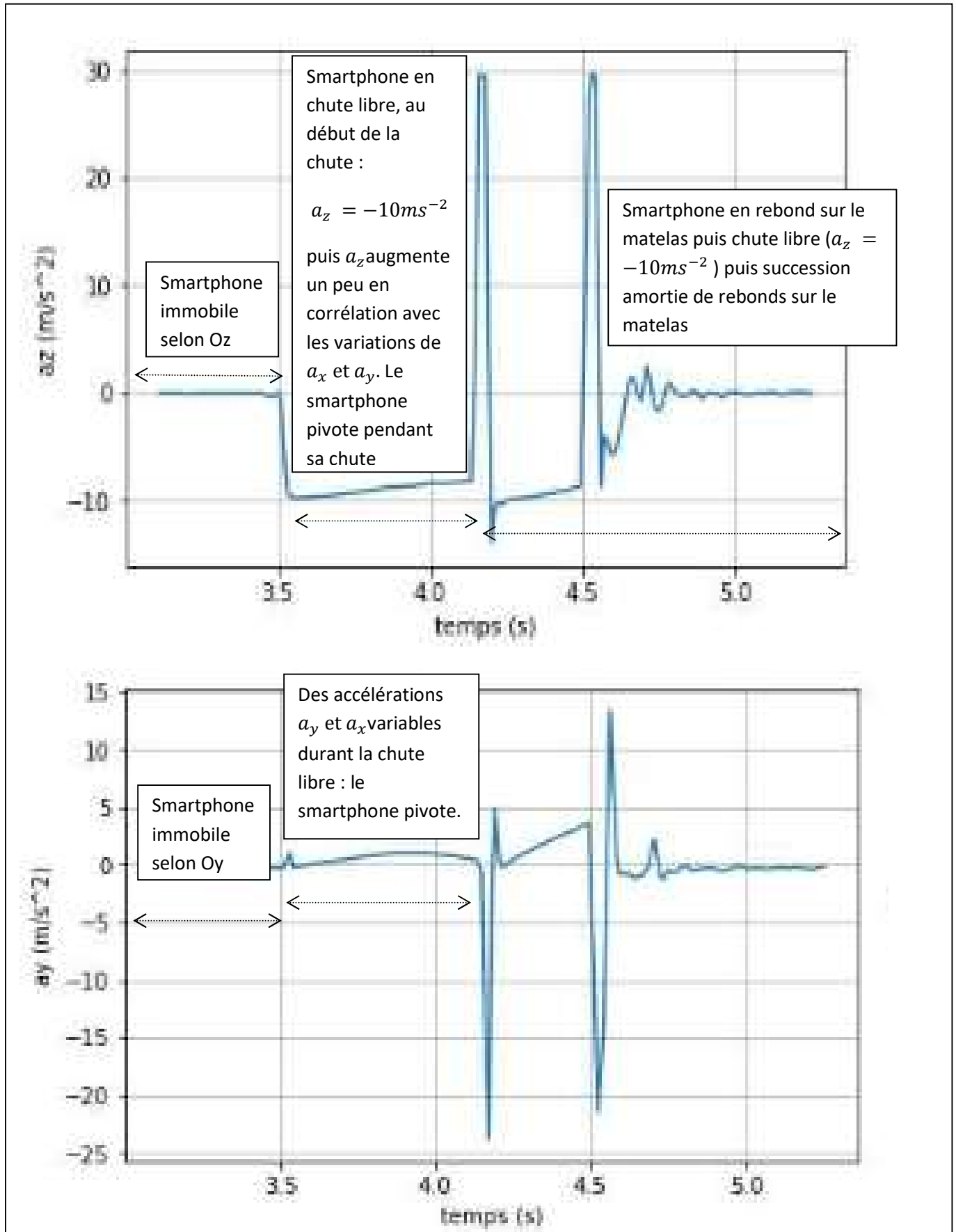
13. Pour  $a_c = g$  d'après la question 8  $x = 10nm$  et le potentiel :

$$V(x) = -\frac{x}{e}U_0 = -\frac{10^{-8}}{10^{-6}}1 = -10mV$$

14. Jusqu'à 3,5 seconde le smartphone présente une accélération nulle selon les trois axes,

Sur le graphe de  $a_z$  on observe une accélération de  $-10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  qui croît un peu sur la durée de la chute qu'on mesure à environ 0,6s avec une règle.

La relation reliant la hauteur  $h$  de chute d'un objet ponctuel, lâché sans vitesse initiale, au temps  $t$  de chute est  $h = \frac{1}{2}gt^2$  donc  $h = 5 * 0,6^2 = 5 * 0,36 = 1,80\text{m}$



15.  $P$  est la puissance thermique (le flux thermique) échangée entre le capteur et son environnement :

$$P = \frac{\delta Q}{dt} \Leftrightarrow \delta Q = P dt$$

16. L'énergie interne d'une phase condensée s'écrit  $U = CT$  avec  $C$  capacité thermique en  $J.K^{-1}$ . On écrit également  $U = mcT$  avec  $c = C/m$  capacité thermique massique en  $J.K^{-1}.kg^{-1}$ .

17. On applique le premier principe des systèmes fermés au capteur entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$U(t + dt) - U(t) = -a(T - T_e)dt$$

$$\frac{T(t + dt) - T(t)}{t + dt - t} = -\frac{a}{C}(T - T_e)$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{a}{C}T = \frac{a}{C}T_e$$

Par identification on pose :

$$\tau = \frac{C}{a}$$

18. La solution de l'équation est :  $T(t) = T_e + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ , déterminons la constante  $A$  en utilisant la condition initiale  $T(0) = T_0$  :

$$T_e + A = T_0 \Leftrightarrow A = T_0 - T_e$$

$$T(t) = T_e + (T_0 - T_e)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*Vous pouvez aussi écrire la solution de l'équation sans second membre et une solution particulière*

19. Si  $A$  est une matrice ( ou un tableau), en Scilab :

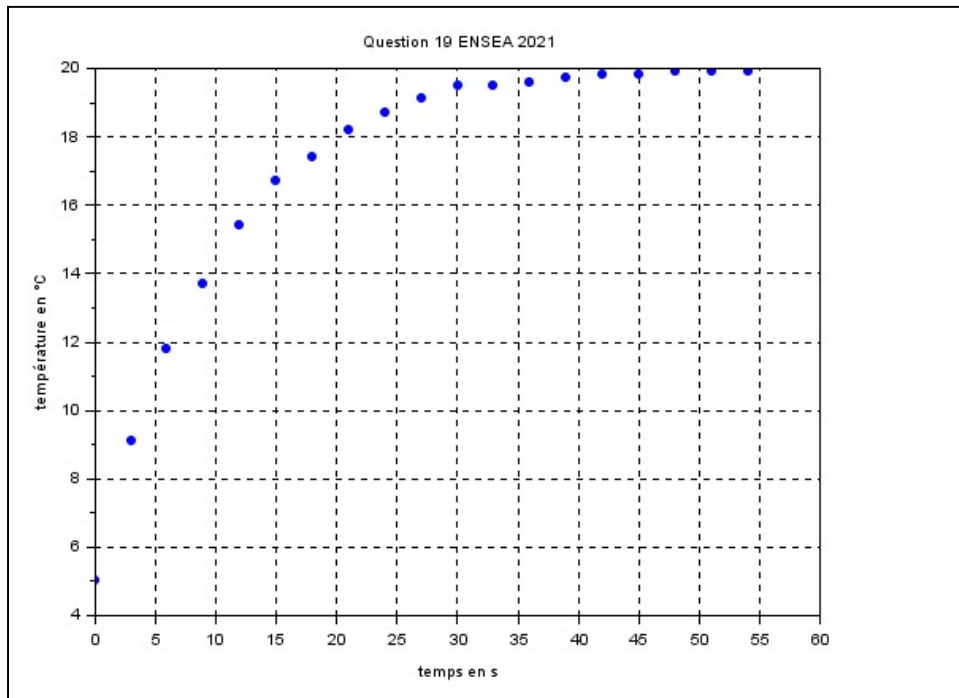
- $A(:, i)$  désigne la colonne  $i$  de  $A$
- $A(i, :)$  désigne la ligne  $i$  de  $A$
- $A(i, j)$  désigne le coefficient  $A_{i,j}$

Le programme attendu

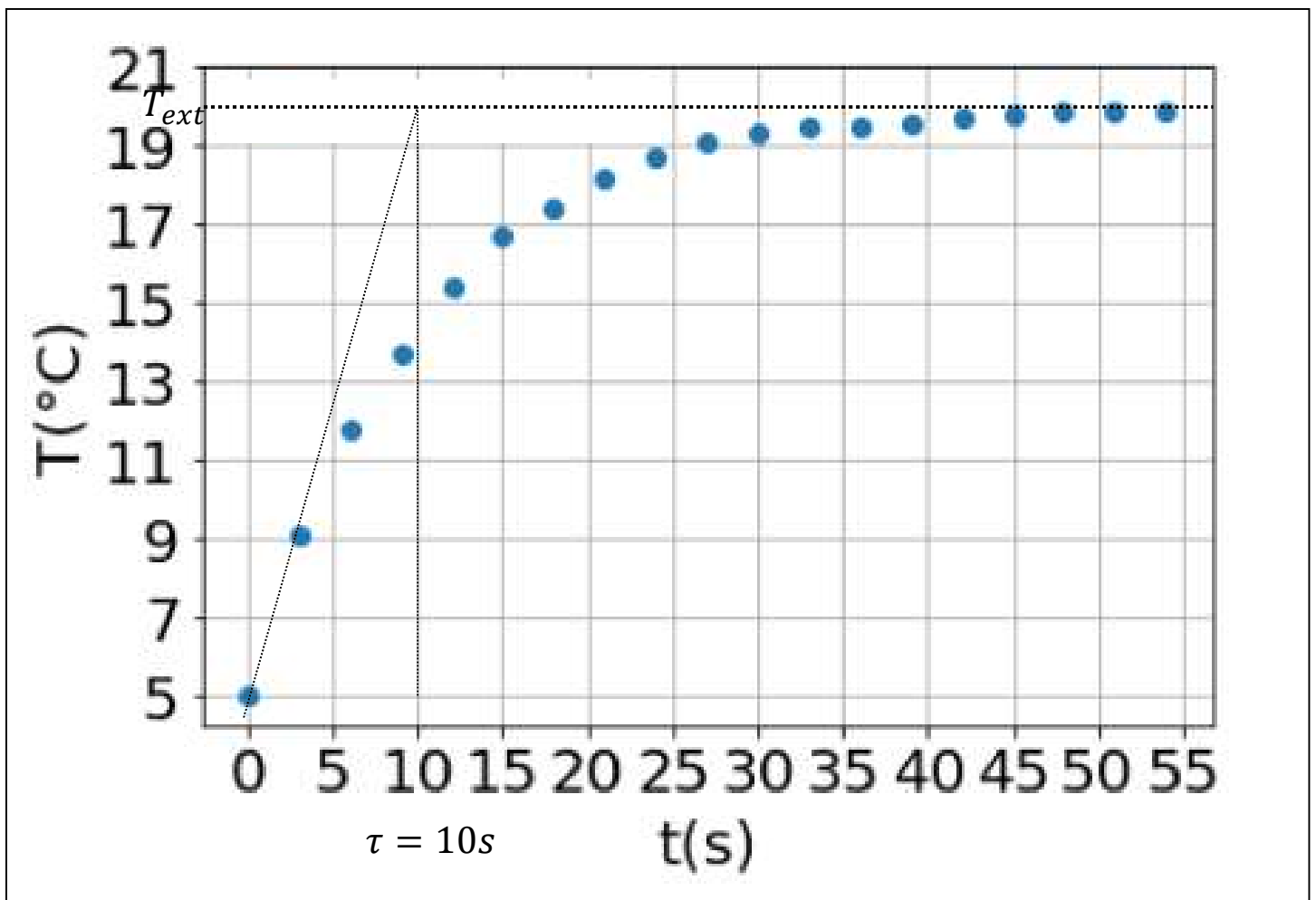
```
Ms = csvRead("mesures.csv")
temperature = Ms(:,2)
temps = Ms(:,1)
plot(temps, température)
```

Pour un rendu tel que celui présenté dans l'énoncé un programme

```
temperature = Ms(:,2)
temps = Ms(:,1)
clf()
plot(temps, température, '.')
xgrid(1)
xlabel('temps en s')
ylabel('température en °C')
xtitle(' Question 19 ENSEA 2021')
```



20. On utilise la méthode de la tangente dont le point d'intersection avec l'asymptote d'équation  $T = T_{ext}$  présente une abscisse égale à  $\tau = 10s$ .



21. L'équation vérifiée par la température  $T$  est identique à l'équation vérifiée par la tension  $U_c$  d'un condensateur dans un circuit  $RC$  alimenté par un générateur de fem  $U_{ext}$  :

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c}{\tau} = \frac{U_{ext}}{\tau}$$

Pour une tension en notation complexe  $\underline{U}_{ext} = U_m e^{j\omega t}$  on écrit  $\underline{U}_c = U_{cm} e^{j(\omega t + \varphi)}$  :

$$\underline{U}_c \left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{\underline{U}_{ext}}{\tau}$$

$$\frac{\underline{U}_c}{\underline{U}_{ext}} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

De même :

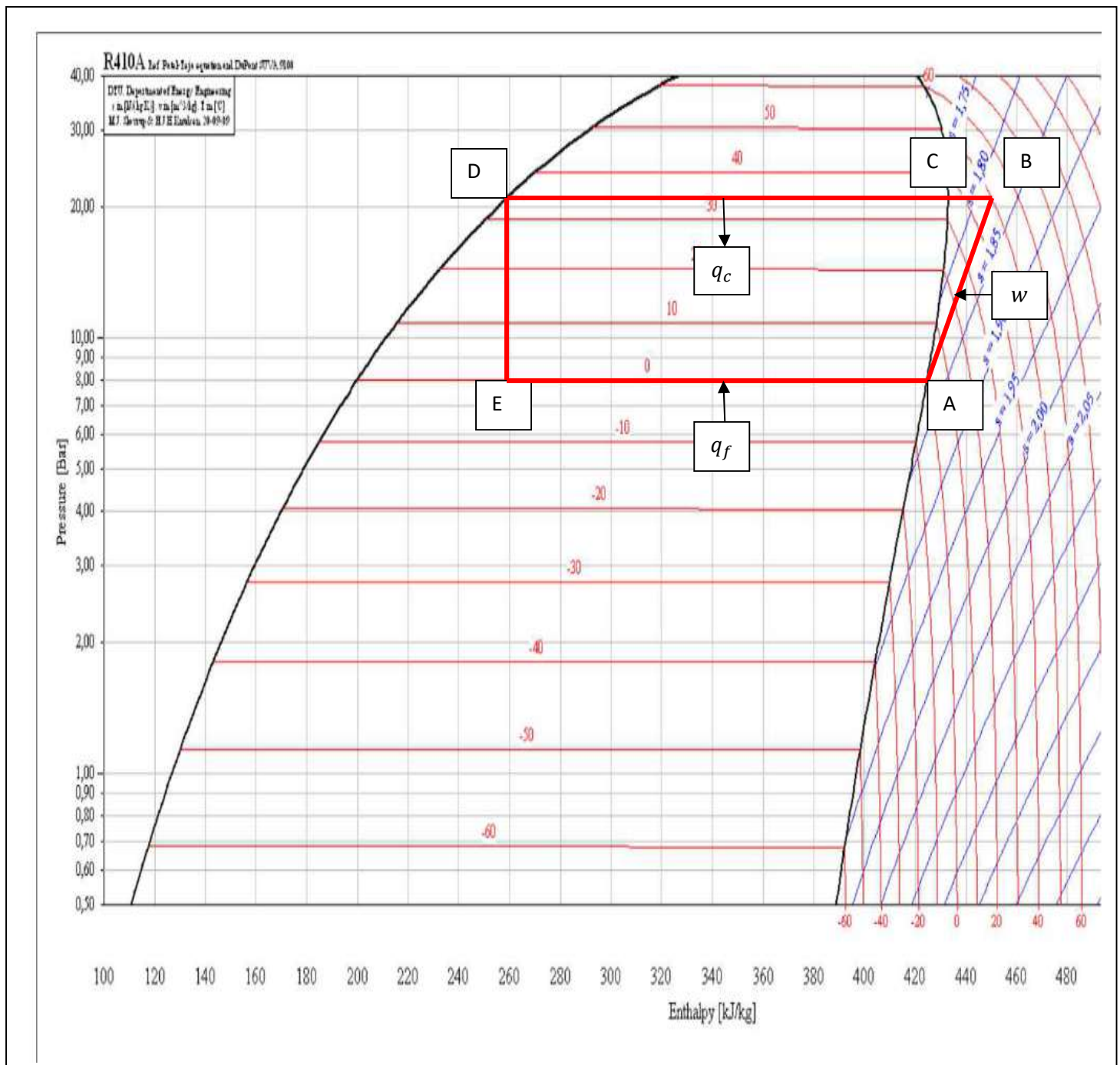
$$\frac{\underline{T}}{\underline{T}_{ext}} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure  $\omega_c = \tau^{-1}$ .

22. On lit l'énoncé jusqu'à l'intitulé de la question 22, puis en suivant l'énoncé :

- On place le point A sur la courbe 'gaz saturé' et sur l'isotherme  $0^\circ\text{C}$  ( $T_e = 0^\circ\text{C}$  entrée du compresseur donc point  $T_A = 0^\circ\text{C}$  puisqu'on admet que  $T_e$  et  $T_s$  sont égales aux températures du fluide frigorigène en entrée et en sortie du compresseur).
- AB est une transformation adiabatique réversible donc une transformation isentropique, on trace la courbe AB 'parallèlement' aux isentropiques  $s = 1,80$  et  $s = 1,85$  jusqu'à l'isotherme  $50^\circ\text{C}$ , température du point B (température du fluide frigorigène en sortie du compresseur).
- BCD est une isobare, C est placé sur la courbe de gaz saturé, D est placé sur la courbe de liquide saturé.
- DE est une isenthalpe, E a une pression égale à la pression du point A.
- Finalement EA est une isobare.

On lit alors sur le diagramme en  $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  :  $h_A = 425$ ,  $h_B = 450$ ,  $h_D = h_E = 260$



23. L'efficacité d'une pompe à chaleur est défini par :

$$e = \frac{|q_c|}{w} = -\frac{q_c}{w}$$

$q_c$  est le transfert thermique massique s'effectuant du fluide vers la source chaude au cours de la transformation BD

$w$  est le transfert d'énergie massique utile s'effectuant du compresseur vers le fluide frigorigène au cours de la transformation AC

On applique le premier principe des systèmes ouverts au fluide entre les états A et B :  $h_B - h_A = w + q_{AB}$

La transformation dans le compresseur est supposé adiabatique réversible donc  $q_{AB} = 0$  et  $w = h_B - h_A$

On applique le premier principe des systèmes ouverts au fluide entre les états B et D :  $h_D - h_B = w_{BD} + q_c$

L'énoncé précise que le condenseur ne présente pas de partie mobile (comme tous les échangeurs de chaleurs) donc  $w_{BD} = 0$  et  $q_c = h_D - h_B$ .

$$e = -\frac{h_D - h_B}{h_B - h_A} = -\frac{260 - 450}{450 - 425} = 7,6$$

24. L'énoncé donne la formule de l'efficacité théorique maximale  $e_{th}$  d'une pompe à chaleur fonctionnant réversiblement (attention les températures doivent être exprimées en K) :

$$e_{th} = \frac{T_D}{T_D - T_A}$$

On lit sur le diagramme  $T_D = 33 + 273 = 306K, T_A = 0 + 273 = 273K$

$$e_{th} = \frac{306}{306 - 273} = 9,3$$

*Remarque : vous devez savoir démontrer la relation  $e_{th} = \frac{T_D}{T_D - T_A}$ , refaites cette démonstration en écrivant le diagramme fonctionnel d'une pompe à chaleur fonctionnant entre une source chaude de température  $T_D$  et une source froide de température  $T_A$ . On écrit le premier principe des systèmes fermés sur un cycle et on utilise le second principe ou l'inégalité de Clausius.....*

25. On observe que  $e < e_{th}$  comme on pouvait s'y attendre. En réalité le cycle présente plusieurs causes d'irréversibilité comme les frottement mécaniques dans le compresseur, la conduction thermique dans les parois du condenseur et de l'évaporateur, ....

26. La résultante des forces de pression  $d\vec{F}_p$  sur un volume mésoscopique  $dV$  s'écrit :

$$d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)dV$$

Dans un référentiel galiléen, pour un volume  $dV$  de fluide uniquement soumis aux forces de pression et de gravité, la première loi de Newton s'écrit :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P)dV + \rho dV \vec{g} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

27. L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait isotherme :

$$PV = nRT_0 \quad n = \frac{m}{M} \quad RT_0$$

$$\rho(M) = \frac{m}{V} = \frac{P(M)M}{RT_0}$$

*Remarque La notation du point M ne doit bien sûr ne pas être confondu avec M désignant la masse molaire.*

28. La pression ne dépend que de z donc l'équation d'équilibre s'écrit en projection sur OZ (vertical ascendant : donc  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ ) :

$$-\frac{dP}{dz} - \rho g = 0$$

$$-\frac{dP(z)}{dz} - \frac{P(z)M}{RT_0} g = 0$$

$$\frac{dP(z)}{dz} + \frac{P(z)}{\delta} = 0 \quad \text{avec } \delta = \frac{RT_0}{Mg} \text{ homogène à une longueur}$$

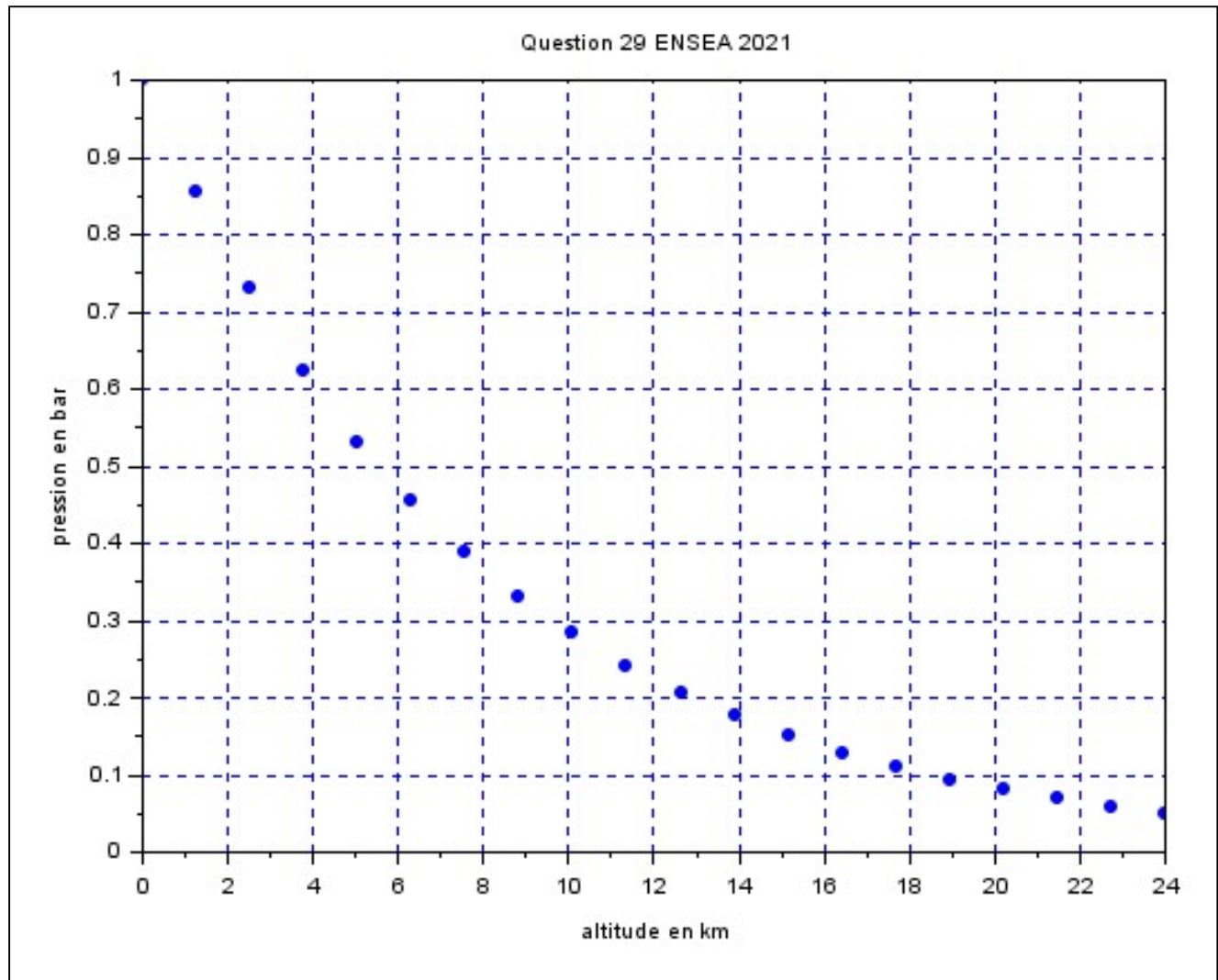
$$\delta = \frac{8,3 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 8,3 \cdot \frac{300}{290} 10^3 \approx 8,3 \text{ km}$$

29. La solution de l'équation précédente s'écrit :

$$P(z) = K e^{-\frac{z}{\delta}}$$

En utilisant la condition limite  $P(0) = P_0$  on obtient :

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{\delta}}$$



```

function P = pression(z, delta)
    P = exp(-z/delta) // z en km et delta en km : OK
endfunction
delta = 8,3 //delta = 8,3 km
n_point = 20 // nombre de points pour la courbe P(z)
z = linspace(0,3*delta, n_point) // altitude est une matrice à 1 ligne et 20 coefficients ....
P = zeros(1, n_point) // pression est une matrice à 1 ligne et n colonne dont les coefficients sont nuls
for i = 1:n_point
    P(i) = pression(z(i), delta) // calcul des pressions par une boucle for...
end
clf // effacement de la fenêtre graphique pour éviter la super position de plusieurs graphiques
plot(z, P, '.') // traçage de P en fonction de z en représentant les points (z(i), P(z(i))) par un point !
xgrid(2)
xlabel('altitude en km ')
ylabel('pression en bar ')
xtitle(' Question 29 ENSEA 2021')

```

Le programme n'était pas demandé mais pour s'entraîner .....

30. On utilise le développement limité de  $x \mapsto e^x$  au premier ordre au voisinage de 0  $e^x = 1 + x + o(x)$

En physique pour  $|x| \ll 1$  on écrit :

$$e^x \approx 1 + x$$

Pour faire un calcul numérique on peut utiliser un DL, par exemple :

$$e^{-0,05} ? \quad |-0,05| \ll 1, e^{-0,05} \approx 1 - 0,05 \approx 0,95$$

En comparant l'ordre de grandeur de la taille  $H$  d'un homme à la valeur de  $\delta = 8,3km$  on vérifie :

$$|x| = \frac{H}{\delta} \ll 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(H) - P_0 &= P_0 \left( e^{-\frac{H}{\delta}} - 1 \right) \approx P_0 \left( -\frac{H}{\delta} \right) \\ H &\approx \frac{P_0 - P(H)}{P_0} \delta \\ H &\approx \frac{0,20hPa}{1000hPa} 8,3 \cdot 10^3 m = 0,2 \cdot 8,3 m \approx 1,7m \end{aligned}$$

*Remarque  $H$  ne doit pas être donné avec plus de deux chiffres significatifs, comme  $\delta$ , compte tenu de la valeur approximative de  $\delta$ .*

31.  $u(H)$  est l'incertitude sur la mesure de  $H$ . Avec une seule mesure de  $H$  on ne peut pas obtenir une valeur de  $u(H)$ , on obtient une estimation de  $u(H)$  **par simulation numérique**.

Dans ce problème on considère que  $u(H)$  n'est due qu'à l'incertitude  $u(P)$  de lecture de la pression.

Pour estimer  $u(H)$  on fait l'hypothèse que la pression à l'altitude  $z$  est une variable aléatoire suivant une **loi normale** (par défaut c'est la loi normale qui est choisie) de moyenne  $P(z)$  et d'écart type  $u(P)$  :

- la pression à l'altitude  $z = H$  est une variable aléatoire suivant une **loi normale** de moyenne  $P(H)$  et d'écart type  $u(P)$ .
- la pression à l'altitude  $z = 0$  est une variable aléatoire suivant une **loi normale** de moyenne  $P(0)$  et d'écart type  $u(P)$ .

L'instruction Scilab  $Pz = grand(1,1,'nor',P(z),u(P))$  simule (\*) une valeur de la pression à l'altitude  $z$ .

On simule donc  $N = 10000$  fois la mesure de  $P(H)$  et  $P(0)$ , on calcule  $N$  valeurs de  $H$  par la formule :

$$H \approx \frac{P_0 - P(H)}{P_0} \delta$$

Les  $N$  valeurs simulées de  $H$  sont mémorisées dans un tableau (une matrice)  $tab_H$ .

On calcule sur les  $N$  valeurs simulées de  $H$  un écart type  $u(H)$  par l'instruction  $uH = stdev(tab_H)$

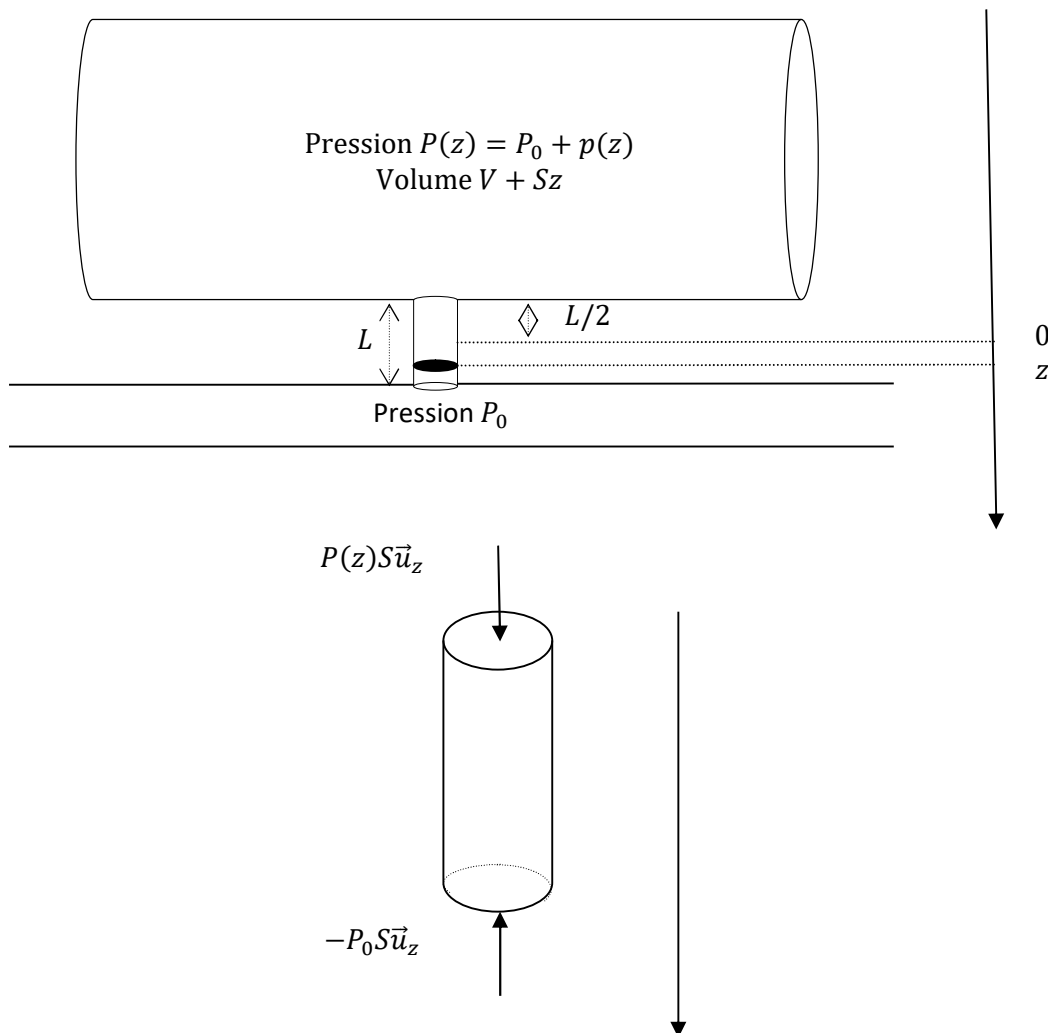
(\*) *grand* est une fonction scilab générant des nombres aléatoires selon une loi donnée, pour la loi normale elle s'écrit ainsi :  $X = grand(1,1,'nor',m,\sigma)$   $X$  est alors une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne  $m$  et d'écart type  $\sigma$ .

Voici un programme répondant à la question.

```
// Pression en hPa, distance en m
PH = 998,80 //pression mesurée à l'altitude H donnée par l'énoncé
P0 = 1000,00 //pression mesurée à l'altitude 0 donnée par l'énoncé
UP = 0,02 //incertitude sur la lecture de la pression donnée par l'énoncé
delta = 8600 //valeur de delta : constante de longueur de la loi théorique P(z)
N = 10000 //N est le nombre de valeurs de H calculées permettant d'obtenir une estimation de uH
tab_H = zeros(1,N) //tab_H est une matrice à 1 ligne et N colonnes dont tous les coefficients sont nuls
for i = 1:N
    PHsim = grand(1,1,'nor',PH,UP) //simulation d'une mesure de PH
    P0sim = grand(1,1,'nor',P0,UP) //simulation d'une mesure de P0
    Hsim = delta*(P0sim-PHsim)/P0sim //calcul approché de H
    tab_H(i)= Hsim // mémorisation de la valeur de H calculée
end // fin de la boucle for
uH = stdev(tab_H) // calcul de uH
disp(uH) // affichage de uH
```

32. Une incertitude de 30 cm pour une valeur calculée de 175 cm n'est pas satisfaisante.

33. Un schéma s'impose comme souvent !



La résultante des forces de pression s'écrit :

$$\vec{f} = (P(z) - P_0)S\vec{u}_z = (P_0 + p(z) - P_0)S\vec{u}_z = p(z)S\vec{u}_z$$

34. En appliquant la loi de Laplace :

$$P(z)V(z)^\gamma = P_0V^\gamma \Leftrightarrow P(z)(V + Sz)^\gamma = P_0V^\gamma$$

$$P(z) = P_0 \left( \frac{V}{V + Sz} \right)^\gamma = P_0 \left( 1 + \frac{S}{V}z \right)^{-\gamma}$$

$$P(z) \approx P_0 \left( 1 - \frac{\gamma S}{V}z \right) \quad \text{car } u = \frac{Sz}{V} \ll 1$$

$$P_0 + p(z) = P_0 - \frac{\gamma S}{V}P_0z \Leftrightarrow p(z) = -\frac{\gamma S}{V}P_0z$$

Il faut connaitre les développements limités du premier ordre suivant, pour  $u \ll 1$  (\*) :

$$(1 + u)^\alpha \approx 1 + \alpha u, \quad e^u \approx 1 + u, \quad \ln(1 + u) \approx u$$

(\*) en math on écrit au voisinage de 0.

35. On applique le principe fondamental de la dynamique au système défini par l'énoncé dans un référentiel terrestre supposé galiléen en supposant que le système ne subit que les forces de pression :

$$m\ddot{z} = \vec{f} \Leftrightarrow m\ddot{z} = -\frac{\gamma S^2}{V}P_0z$$

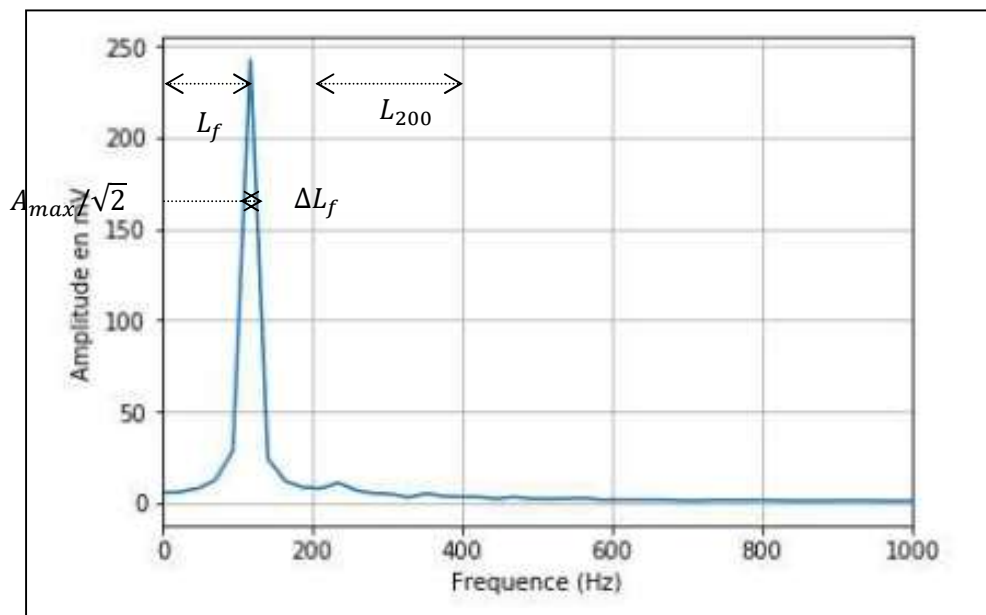
$$\ddot{z} = -\omega_0^2 z \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma S^2}{mV}P_0} = \sqrt{\frac{\gamma S^2}{\rho LSV}P_0} = \sqrt{\frac{\gamma S}{\rho LV}P_0}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma S}{\rho LV}P_0}$$

36. On observe un pic de résonance centré sur :

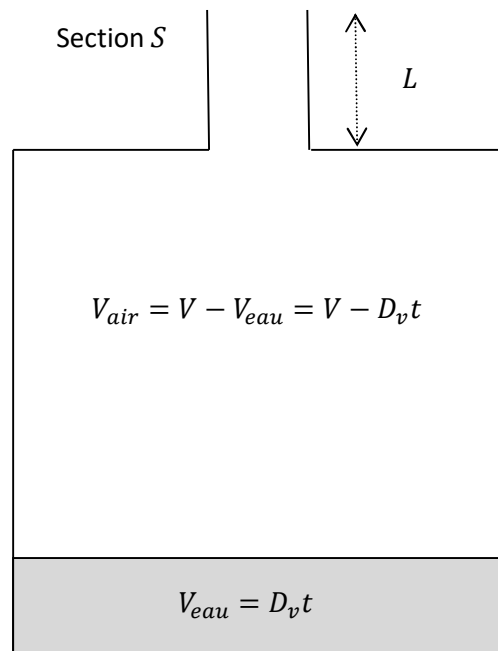
$$f = \frac{L_f}{L_{200}} 200 = 0,6 * 200 = 120\text{Hz}$$

de largeur (mesuré à  $A_{max}/\sqrt{2}$ ) en fréquence :  $\Delta f = \frac{\Delta L_f}{L_{200}} * 200 = 10\text{Hz}$



37. et 38 . On peut représenter l'expérience décrite par le schéma suivant :

**Aucun étudiant n'a traité la question 38 : question difficile (cf. rapport du jury).**



Le résonateur est excité par l'écoulement d'eau dans le récipient de volume  $V$ , une onde acoustique est émise à la fréquence  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma S}{\rho L V}} P_0$  ou  $V$  est le volume d'air dans le résonateur. On modifie ce volume d'air par un écoulement d'eau caractérisé par un débit volumique  $D_v$ , en conséquence le volume d'air dans le résonateur est :

$$V(t) = V - D_v t$$

La fréquence est alors modulée selon la loi :

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma S}{\rho L (V - D_v t)}} P_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma S}{\rho L V \left(1 - \frac{D_v}{V} t\right)}} P_0 = f_0(0) \left(1 - \frac{D_v}{V} t\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Cette fréquence varie continument, le graphique montre que les fréquences mesurées varient par palier de 22 Hz, la résolution en fréquence est de 22 Hz.

En se limitant à une durée  $t$  suffisamment faible pour que on puisse considérer que

$$\frac{D_v}{V} t \ll 1 \Leftrightarrow V_{eau} = D_v t \ll V$$

On utilise un développement limité :

$$f_0(t) = f_0(0) \left(1 - \frac{D_v}{V} t\right)^{-\frac{1}{2}} \approx f_0(0) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D_v}{V} t\right)$$

On obtient dans ces conditions une dépendance linéaire de la fréquence de vibration avec le temps en cohérence avec les résultats expérimentaux.

39. Dans des conditions normales, l'air est un milieu isolant dépourvu de charge  $\rho(M, t) = 0$  et de courant ( $\vec{j}(M, t) = \vec{0}$ ), les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\text{Equation de Maxwell-Gauss} \quad \text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{Equation de Maxwell-flux} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{Equation de Maxwell - Ampère} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Equation de Maxwell - Faraday} \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

40. La formule  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$  n'était pas donnée dans l'énoncé ! C'est un oubli je pense. Cependant cette formule doit être connue par l'usage. On écrit cette formule pour le champ  $\vec{E}$  :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}(0) - \Delta \vec{E}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = -\Delta \vec{E}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \text{ soit } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \text{ en posant } \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

41. La polarisation caractérise la direction du champ électrique (quand celle-ci est définie, c'est-à-dire quand elle n'est pas aléatoire ce qui est le cas des ondes électromagnétiques émises par une lampe ou par le soleil).

Le champ électrique donné par l'énoncé est selon l'axe Oz donc l'onde est polarisée rectilignement selon l'axe oz.

La deuxième partie de cette question est hors programme car elle concerne l'utilisation d'un polariseur

*Pour une introduction à l'utilisation d'un polariseur pour obtenir une onde polarisée rectilignement ou pour tester expérimentalement qu'une lumière est polarisée rectilignement cf la source suivante :*

[https://fr.science-questions.org/comment\\_ca\\_marche/158/Polarisation\\_de\\_la\\_lumiere/](https://fr.science-questions.org/comment_ca_marche/158/Polarisation_de_la_lumiere/)

42. Posons :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \text{ avec } k = \frac{\omega}{v}$$

On calcule les dérivées secondes de  $\vec{E}$  et on les « injecte » dans l'équation de propagation :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z = -\omega^2 \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -k(-E_0 \sin(\omega t - kx)) \vec{u}_z = k E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z = -k^2 \vec{E}$$

L'équation de propagation s'écrit :

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = -k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{v^2} \vec{E} \Leftrightarrow (v = c \text{ ou } v = -c)$$

L'énoncé précise que  $v > 0$  on retient donc la solution  $v = c$ .

43. L'énoncé indique de donner l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(x, t)$ , mais il faut le calculer à partir du champ électrique qui lui est bien donné par l'énoncé.

L'analyse de l'expression du champ électrique montre que l'onde est plane (localement d'après l'énoncé), harmonique, progressive selon le vecteur  $\vec{u}_x$ . Pour calculer le champ magnétique  $\vec{B}(x, t)$ , on peut appliquer la relation (obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Faraday) :

$$\vec{B}(x, t) = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}(x, t) \text{ avec } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x \text{ (vecteur d'onde)}$$

$$\vec{B}(x, t) = \frac{1}{c} \vec{u}_x \wedge E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

44. La norme du vecteur de Poynting s'exprime en  $W \cdot m^{-2}$ , le vecteur de Poynting se calcule par la formule :

$$\vec{R}(x, t) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}(x, t) \wedge \vec{B}(x, t))$$

$$\vec{R}(x, t) = \frac{1}{\mu_0} (E(x, t) \vec{u}_z \wedge \left(-\frac{E(x, t)}{c} \vec{u}_y\right)) = \frac{E(x, t)^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x$$

On vérifie bien que les vecteurs  $\vec{R}(x, t)$  et  $\vec{k}$  ont le même sens !

45. On a :

$$\langle \vec{R}(x, t) \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{u}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

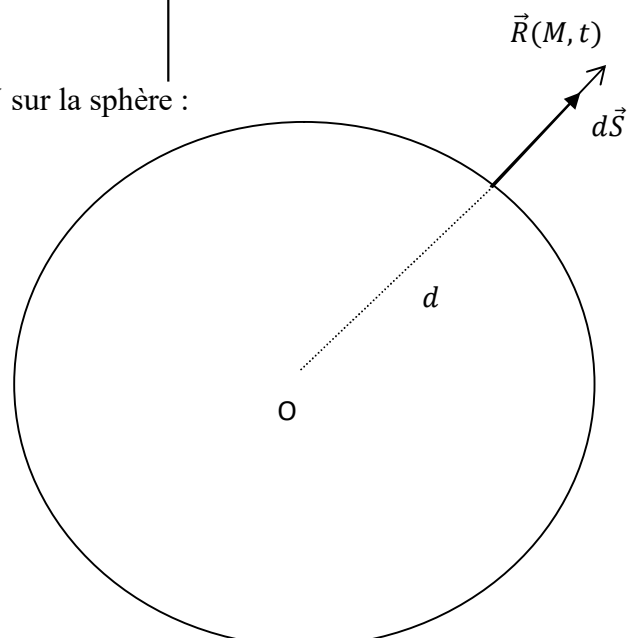
Vous devez savoir que :

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi(x, y, z)) \rangle = \frac{1}{2} = \langle \sin^2(\omega t - \varphi(x, y, z)) \rangle$$

46. La source émet de façon isotrope donc la puissance (instantanée)  $P(t)$  émise se répartit uniformément (\*) sur une sphère de centre O et de rayon  $d$  :

$$P(t) = \iint_{M \in \text{Sphère}(O, d)} \vec{R}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_{M \in \text{Sphère}(O, d)} R(M, t) \cdot dS = R(M, t) S = R(M, t) 4\pi d^2$$

(\*) **uniformément** donc  $R(M, t)$  ne dépend pas du point  $M$  sur la sphère :



En valeur moyenne :

$$P = \langle P(t) \rangle = \langle R(M, t) \rangle 4\pi d^2$$

$$\|\langle \vec{R}(M, t) \rangle\| = \langle R(M, t) \rangle = \frac{P}{4\pi d^2}$$

47. D'après les questions précédentes :

$$\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{P}{4\pi d^2} \text{ donc } E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{4\pi}} \frac{1}{d}$$

Or :

$$\sqrt{\frac{2\mu_0 c}{4\pi}} = \sqrt{\frac{2 * 4\pi * 10^{-7} * 3 \cdot 10^8}{4\pi}} = \sqrt{60}$$

Donc :

$$E_0 = \frac{\sqrt{60P}}{d}$$

48. Par force il faut comprendre de nos jours la puissance émise par une source lumineuse. Pierre Bouger conjecture que cette puissance s'atténue avec la distance  $d$  par la loi :

$$\varepsilon = \frac{K}{d^2} \text{ avec } K \text{ une constante}$$

Une méthode numérique est de vérifier (ou non !) que le produit  $\varepsilon d^2 = K$  est constant aux incertitudes expérimentales près.

*On remarque que  $d$  est donné avec deux chiffres significatifs et  $\varepsilon$  avec trois chiffres significatifs, on calcule  $\varepsilon d^2$  et on affiche dans le tableau  $\varepsilon d^2$  avec deux chiffres significatifs.*

Un exemple de calcul à mettre sur la copie, pour la deuxième ligne du tableau :

445
22
890
8900
9790

$$445 * 0,022 = 445 * 22 \cdot 10^{-3} = 9790 \cdot 10^{-3} = 9,79 \text{ avec 2 CS : } \varepsilon d^2 = 9,8$$

On obtient finalement :

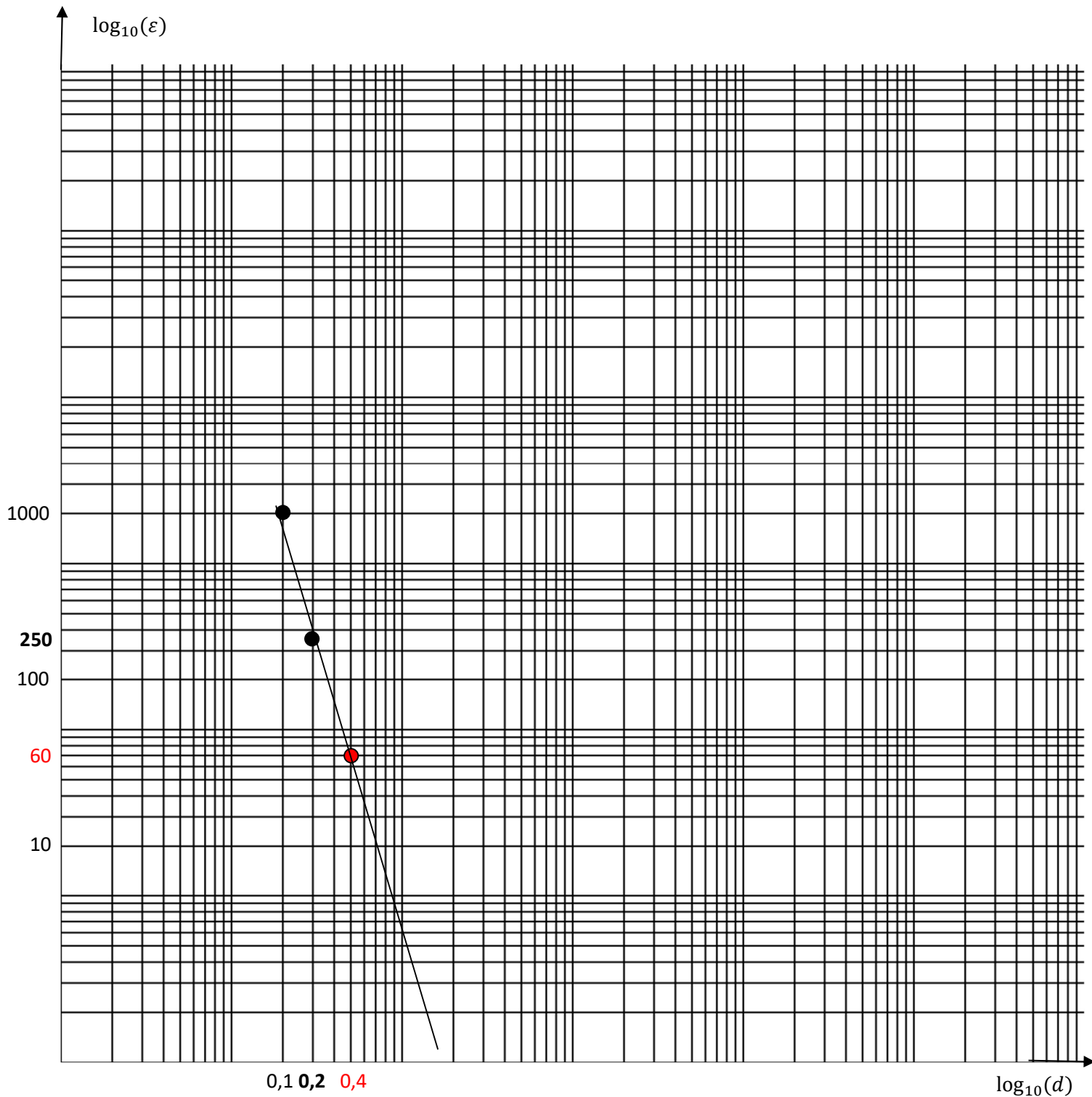
$\varepsilon (\text{lux})$	$d^2 (\text{m})$	$\varepsilon d^2 (\text{lxm}^2)$
1000	0,010	10
445	0,022	9,8
250	0,040	10
155	0,063	9,8
110	0,090	9,9
60	0,16	9,6

Les résultats obtenus vont dans le sens de la conjecture de Bouger avec une précision de l'ordre de 2%.

On remarque que :

$$\log_{10}(\varepsilon) = \log_{10}(K) - 2 \log_{10}(d)$$

En utilisant un graphique log/log on doit obtenir une droite de pente  $-2$  si la conjecture est exacte, vérifions :



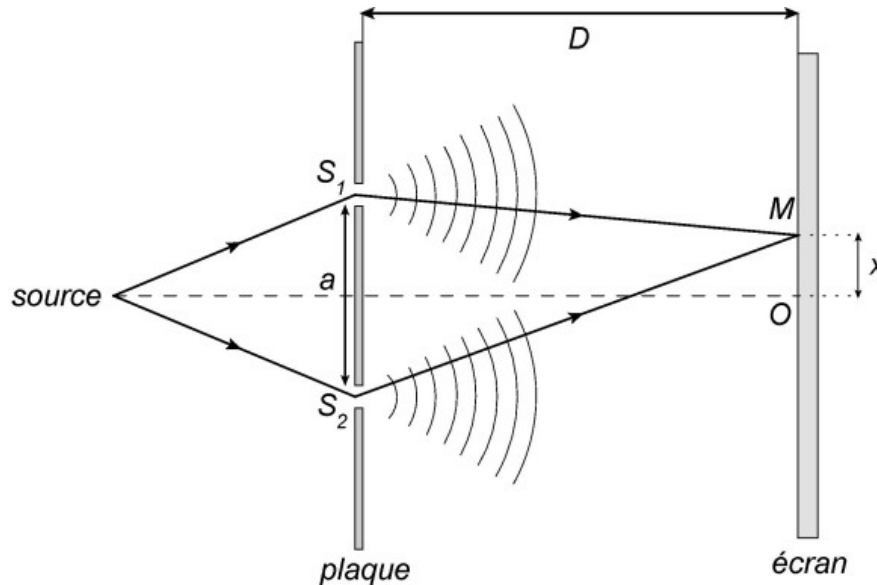
$$p = \frac{\log_{10}(1000) - \log_{10}(60)}{\log_{10}(0,1) - \log_{10}(0,4)} = \frac{\log_{10}\left(\frac{1000}{60}\right)}{\log_{10}\left(\frac{0,1}{0,4}\right)} = \frac{1,2218}{-0,6020} = -2,03 \approx -2$$

49. On fait l'analogie du dispositif décrit par l'énoncé avec le dispositif des deux trous d'Young

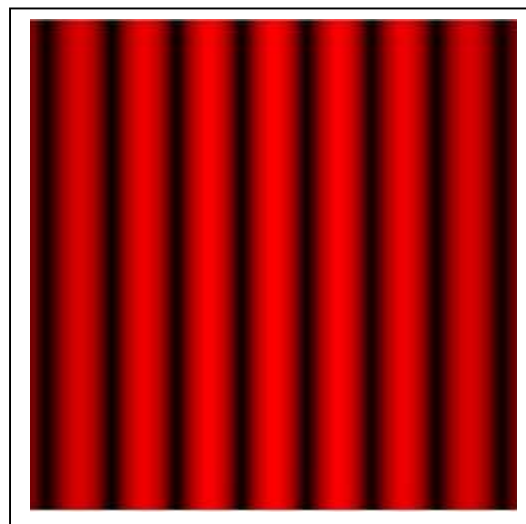
Le dispositif des deux trous d'Young est composé d'une source lumineuse monochromatique éclairant un écran percé de deux trous de même taille et distant de  $a$ .

Ces deux trous diffractent la lumière reçue et sont assimilables à deux sources secondaires émettant en phase (ils sont à égales distance de la source lumineuse) une onde lumineuse de même fréquence  $f$ .

Les sources secondaires étant cohérentes, on observe dans un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie du dispositif (placé à une distance  $D \gg a$ ) une intensité lumineuse de période  $i = \frac{\lambda D}{a}$



Pour des fentes rectangulaires fines (hauteur très grande devant leur largeur) on observe au centre de l'écran des franges rectilignes parallèle aux fentes.



50. Sur le graphique on observe que l'intensité acoustique est une fonction périodique de période spatiale 0,5m (pour  $x = 0$  et  $x = 0,5m$  on a une intensité maximale). L'intensité est maximale pour :

$$\left| \cos\left(\frac{\pi a f x}{c D}\right) \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi a f x}{c D} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x_k = k \frac{c D}{a f} \Leftrightarrow D = \frac{a f}{c} \frac{x_k}{k}$$

Pour  $k = 1$  on lit sur le graphique  $x_1 = 0,5m$  :

$$D = \frac{1.6800 \cdot 0,5}{340 \cdot 1} = \frac{3400}{340} = 10m$$

51. On peut réaliser une triangulation, on peut utiliser une corde, tendue par un poids, que l'on fait glisser du haut de l'immeuble jusqu'en bas puis on mesure la longueur utile de la corde, on peut mesurer la hauteur d'un étage et utiliser la périodicité de l'immeuble.....

## Rapport du Jury de l'épreuve écrite

Une lecture de ce rapport est fortement recommandée.

### Épreuve écrite

Le sujet porte sur l'étude de **quelques expériences réalisables avec un smartphone**. Sujet centré sur l'actualité, il permet également d'aborder de nombreuses parties du programme.

Le sujet comporte une majorité de questions classiques, deux questions plus ouvertes de type résolution de problème et deux questions d'informatique.

#### Partie 1 : Étude d'un mouvement de chute

La première question (Q1) consistant à exprimer les forces de rappel a posé problème à de nombreux candidats, ils ont néanmoins pu avancer dans cette partie en s'appuyant sur le résultat donné. L'application du PFD (Q2) est rarement faite rigoureusement, il y a confusion entre  $x_M$  et  $X = x_M - x_C$ , les candidats font apparaître  $a_C$  de manière non justifiée. Lorsque l'expression à établir est donnée, le correcteur est très vigilant sur la démonstration. Si le candidat propose une démarche qui n'aboutit malheureusement pas à la formule demandée, il n'est vraiment pas valorisant de chercher à tromper le correcteur, surtout en début de copie, cela donne une mauvaise image du candidat.

Dans le calcul de module (Q4) on note un manque de rigueur, en particulier au niveau du terme en  $e^{j\varphi}$  qui disparaît avant même le passage au module.

L'analyse du condensateur plan (Q9 à Q13) a été largement abordée. On peut regretter que la surface de Gauss soit rarement représentée alors qu'un schéma était explicitement demandé.

L'argument de symétrie du champ  $\vec{E}$  par rapport au plan chargé n'est quasiment jamais mentionné.

La question ouverte (Q14) visant à estimer la hauteur de chute du smartphone a motivé les candidats, les graphes sont assez bien analysés mais la mise en équation de la chute libre n'est presque jamais faite.

#### Partie 2 : Études thermodynamiques

Les questions de cours (Q15 et Q16) sont bien traitées, la résolution de l'équation différentielle d'ordre 1 (Q18) est le plus souvent réussie. La question d'informatique (Q19) est délaissée alors qu'elle était très simple. La détermination graphique de  $\tau$  (Q20) est bien faite, le filtre est souvent identifié comme passe-bas (Q21) mais la fréquence de coupure donnée est presque toujours fautive.

Le cycle thermodynamique est rarement correctement tracé sur le document réponse (Q22). L'erreur la plus fréquemment rencontrée est un palier C-D représenté à 50°C. Beaucoup de candidats ont cru qu'il fallait démontrer l'efficacité théorique de la pompe à chaleur (Q24), alors que la formule était donnée et qu'il fallait seulement faire l'application numérique. Il ne fallait pas oublier de convertir les températures en Kelvin, ce qui n'est toujours pas acquis. Les candidats doivent bien prêter attention au verbe d'action utilisé dans la question : calculer ne signifie pas démontrer.

#### Partie 3 : Mesurer sa taille avec son smartphone

La question demandant la relation vectorielle de la statique des fluides (Q26) ne semble pas avoir été comprise des candidats qui connaissent par contre assez bien la version projetée de la relation demandée. L'expression de la masse volumique (Q27), question classique, a été très bien réussie. Le développement limité à l'ordre 1 (Q30) est complètement ignoré des candidats.

La deuxième question d'informatique (Q31) a été complètement délaissée également, pourtant le barème accorde des points significatifs à ces questions.

**Partie 4 : Étude de l'oscillateur d'Helmholtz**

Cette partie plus difficile a été la moins abordée du sujet (Q33 à Q38), mis à part la question Q36 pour laquelle la justification du modèle de l'oscillateur harmonique est souvent superficielle et la lecture de la fréquence propre très imprécise. Les candidats sont complètement passés à côté de la deuxième question ouverte (Q38) qui était difficile.

**Partie 5 : Retrouver la loi de Bouguer**

Les équations de Maxwell (Q39) sont un peu moins bien sues qu'habituellement, il ne fallait pas oublier de les énoncer dans le vide. Pour le champ électrique (Q41) on regrette toujours la confusion entre direction de polarisation et direction de propagation. Les questions classiques sur le vecteur de Poynting sont bien traitées.

**Partie 6 : Détermination de la hauteur d'un immeuble**

L'impasse semble toujours faite sur les interférences, les candidats n'ont pas su faire l'analogie avec les fentes d'Young (Q49). On déplore la quasi absence de réponse plausible pour la hauteur de l'immeuble (Q50). Pour les autres méthodes de mesure, on a vu d'excellentes réponses originales et aussi malheureusement des propositions ridicules.

En conclusion, le jury de physique souhaite insister sur l'importance de la preuve : de nombreuses questions étaient cette année du type « Monter que... ». Lorsque l'expression littérale à établir est donnée dans l'énoncé, le jury attend du candidat rigueur et honnêteté. S'il lui manque une étape de la démonstration, tenter de faire croire que la démonstration est faite ne sert à rien sinon à perdre la bienveillance du correcteur.

Un effort sur les applications numériques sans calculatrice est attendu, le jury encourage les candidats à s'y entraîner tout au long de l'année. Le candidat doit prendre l'initiative d'arrondir les constantes physiques plutôt que de rester bloqué sur un calcul : c'est une valeur numérique approchée qui est attendue, on s'intéresse surtout à l'ordre de grandeur du résultat.

Le jury souhaite également rappeler qu'il apprécie les copies soignées et encourage les candidats à ne pas relâcher leurs efforts de présentation des copies.