

x

7 Equation d'état de l'eau (***)

Un kilogramme d'eau liquide possède à la température $T_0 = 293K$ et à la pression $P_0 = 10^5 Pa$ le volume $V_0 = 1,002 \cdot 10^{-3} m^3$. L'eau possède dans ces conditions un coefficient de dilatation isobare : $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 3,0 \cdot 10^{-4} K^{-1}$. et un coefficient de compressibilité isotherme : $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 4,9 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$.

1. Expliquer pourquoi on a inclus un signe moins dans l'expression du coefficient χ_T .
2. En se plaçant à pression constante, déduire de l'expression du coefficient α une équation différentielle satisfaite par le volume, puis l'intégrer. Vu que la pression a été préalablement fixée, on n'oubliera pas que la "constante" apparaissant usuellement dans ce genre d'équation différentielle dépend forcément du choix de la pression P , c'est donc une fonction de P .
3. Remplacer l'expression précédente dans le coefficient χ_T . Montrer que $V(T, P) = V_0 \exp(\alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0))$
4. Calculer le volume massique de l'eau liquide à $T_0 = 293K$ sous $P = 10bar$.
5. Calculer le volume massique de l'eau liquide à $T' = 373K$ sous $P = 1bar$.
6. On chauffe une bouteille en acier de volume V_0 constant contenant un kilogramme d'eau liquide à $T' = 373K$. Quelle est alors la pression?
7. Commenter tous ces résultats.

Eléments

5 Notion de thermostat (**)

$$1. T_f = \frac{C_{V,1} T_1 + C_{V,2} T_2}{C_{V,1} + C_{V,2}}$$

3. Application numérique :

- a $T_f = 49,6^\circ C$
- b $T_f = 21,0^\circ C$

6 Pompe à vélo (**)

1. $P_1 = P_0 + P_0 \frac{V_a}{V}$
2. $P_1 = P_0 + i P_0 \frac{V_a}{V}$
3. 42 coups de pompe.

7 Equation d'état de l'eau (***)

2. $V(T) = A(P) \exp(\alpha T)$.
3. $V(T, P) = A_0 \exp(\alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0))$
4. $V = 1,0016 \cdot 10^{-3} m^3$
5. $V = 1,026 \cdot 10^{-3} m^3$
6. $P = \frac{\alpha(T - T_0)}{\chi_T} + P_0 = 490bar$.

Exercice sur diagramme de phase d'un corps pur (TSI INP 2022)

II.1 - Gilet de sauvetage

On étudie ici le modèle à " gonflage automatique hydrostatique " : lors de l'immersion, la pression de l'eau agit sur une membrane qui libère le percuteur d'une cartouche de gaz sous haute pression. Le gaz se détend, assurant ainsi un gonflage immédiat de la vessie (enveloppe étanche) du gilet.

Le modèle de gilet étudié ici est un modèle avec une flottabilité F_a de 150 N, pour lequel une cartouche d'une contenance de 33 g de dioxyde de carbone, CO_2 , est préconisée.

Le volume utile de la cartouche de CO_2 est de 15 mL.



Données			
Atome	Numéro atomique	Nombre de masse	Masse molaire ($g \cdot mol^{-1}$)
C	6	12	12
O	8	16	16

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
 Pression atmosphérique : $P_{atm} = 1,0 bar$
 Masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$

Pour simplifier les calculs, on supposera que le gilet est utilisé en eau douce.

Chaque fois que c'est nécessaire, on suppose que le $CO_{2(g)}$ se comporte comme un gaz parfait.

Q13. Quelle quantité de matière de CO_2 trouve-t-on dans les cartouches préconisées pour le gonflage du gilet ?

On fournit en **figure 3** le diagramme de phase dans le plan (*Pression, Température*) pour le CO₂, ou courbe d'équilibre liquide-vapeur. (1) et (2) sont des domaines, (3) et (4) sont des transformations et (5) est un point particulier.

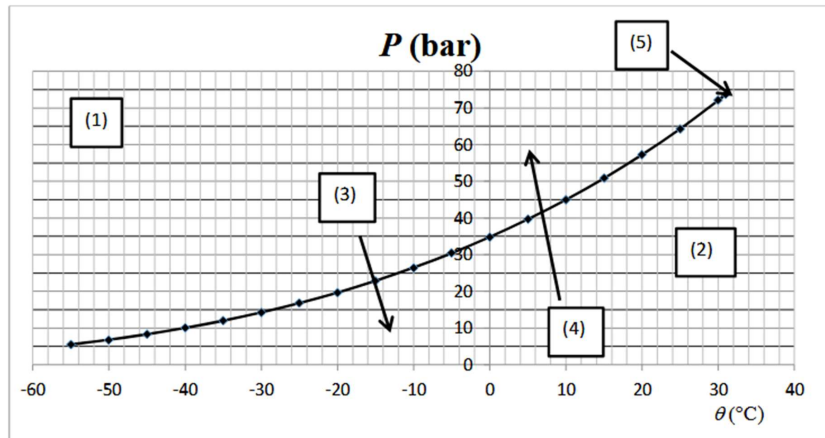


Figure 3 - Courbe d'équilibre liquide - vapeur pour CO₂

θ (°C)	P (bars)	v' volume massique du liquide saturant (m ³ /kg)	v'' volume massique de la vapeur saturante (m ³ /kg)	h' enthalpie massique du liquide saturant (kJ/kg)	h'' enthalpie massique de la vapeur saturante (kJ/kg)
10	45,06	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$7,52 \cdot 10^{-3}$	27,2	228,6
15	50,93	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$6,32 \cdot 10^{-3}$	42,3	222,6
20	57,33	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$5,27 \cdot 10^{-3}$	58,6	213,9
25	64,32	$1,41 \cdot 10^{-3}$	$4,17 \cdot 10^{-3}$	78,7	198,2
30	71,92	$1,68 \cdot 10^{-3}$	$2,98 \cdot 10^{-3}$	108,5	171,5
31,1	73,76	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$2,16 \cdot 10^{-3}$	139,8	139,8

Tableau 1 - Table de caractéristiques de CO₂ pour l'équilibre liquide-vapeur

Q14. Donner les 5 noms manquants de la figure 3.

Q15. Quelle serait la pression à l'intérieur de la cartouche si tout le CO₂ à la température $T = 300$ K se trouvait à l'état gazeux (hypothèse gaz parfait) ? Conclure éventuellement quant à l'état physique correspondant.

Q16. En calculant le volume massique du fluide dans la cartouche, justifier l'état physique dans lequel se trouve le CO₂.

Q17. Expliquer pourquoi la cartouche va se refroidir lorsqu'elle sera percutée et donner le nom et la valeur, à 25 °C, de la grandeur thermodynamique décrivant ce phénomène.

Telle qu'elle est annoncée ici, la flottabilité représente la norme de la poussée d'Archimède que subirait le gilet s'il était entièrement immergé.

Q18. Rappeler l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède en indiquant la signification de chacun des termes utilisés dans cette expression.

Q19. Montrer que le volume du gilet gonflé doit être de 15 L pour obtenir la flottabilité souhaitée.

Dans la question suivante, on suppose que ce volume, initialement vide, est occupé uniquement par du dioxyde de carbone CO₂ gazeux, obtenu après ouverture de la cartouche. On suppose la température du gaz $T = 300$ K ($\theta = 27$ °C). On considère que le gonflage est correct dès que la pression à l'intérieur du gilet dépasse la pression atmosphérique.

Q20. Montrer que la pression à l'intérieur du gilet permet un gonflage correct du gilet.

On a supposé ici une détente isotherme du CO₂ lorsque la cartouche est percutée, mais cette détente est en réalité très rapide, si bien que la transformation peut plutôt s'apparenter à une détente adiabatique (1) suivie d'une évolution isochore (2).

Q21. Faire apparaître sur un diagramme (p,V), représentant la pression en fonction du volume, l'allure de l'évolution de la détente isotherme, ainsi que la succession des 2 transformations (1) et (2) précédentes pour la phase gazeuse.

Le système mécanique à membrane qui permet de percuter la cartouche doit se déclencher lorsque la membrane est immergée à plus de 10 cm sous l'eau. On supposera que l'intérieur de la vessie du gilet est initialement à la pression atmosphérique.

Q22. À quelle différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la vessie du gilet est sensible le dispositif de déclenchement ?

Partie II - Le repas en altitude

Pour préparer un repas chaud une fois arrivé au sommet de la colline, notre randonneur utilise un réchaud à combustible solide pour chauffer de l'eau qu'il aura préalablement purifiée à l'aide d'agents chimiques.

Document 1 - Set de cuisson (extrait du site marchand « monrechaud.com »)

Le set de cuisson Esbit® (popote/réchaud en aluminium anodisé dur, idéal pour les sorties en solo) comprend une casserole d'une capacité de 585 mL, un couvercle et un support de réchaud à combustible solide.

Le support de casserole permet de déposer une tablette de combustible solide Esbit® et fait office de pare-vent. Lors du transport, il se range à l'intérieur de la casserole.



L'ensemble est extrêmement léger et compact. Le set de cuisson Esbit® est livré avec un filet de rangement.

Document 2 - Tablettes de combustible solide (d'après le site marchand « monrechaud.com »)

Vingt tablettes de 4 g de combustible solide permettent de recharger les réchauds pliants Esbit®. Elles peuvent être également utilisées pour allumer un feu de camp, un barbecue ou une cheminée. Deux tablettes de 4 grammes permettent de faire bouillir 0,25 litre d'eau en 5 minutes. Une tablette de 4 g brûle approximativement en 5 minutes.

Matériaux : substances non toxiques dont l'hexamine.

Informations complémentaires :

- Non explosif
- S'allume avec une allumette ou un briquet
- Pas d'étincelles
- Puissance de chauffe forte
- Pouvoir calorifique de l'hexamine : $7 \cdot 10^3 \text{ kcal} \cdot \text{kg}^{-1} = 31 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Ne laisse pas de cendres après la combustion
- Aucune fumée visible
- Léger et compact
- Lorsqu'il est bien entreposé, le combustible solide Esbit® conserve ses caractéristiques techniques pendant de nombreuses années
- Fonctionne également à des températures inférieures à 0 °C et à haute altitude.

Données 2

Capacité thermique massique de l'eau liquide à pression constante : $c_{eau} = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Masse volumique de l'eau liquide : $\mu_{eau} = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$

Enthalpie massique de vaporisation de l'eau sous 1 bar : $\ell_V = 2,3 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Données spécifiques à l'hexamine

Aspect : poudre blanche

Formule brute : $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4$

Masse molaire : $M_h = 140 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masse volumique supposée indépendante de la température : $\mu_h = 1,33 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

Les produits de combustion de l'hexamine dans l'air varient selon les conditions : diazote N_2 , eau H_2O et dioxyde de carbone CO_2 dans les conditions optimales.

Enthalpies standard de formation à 25 °C

Espèce	$\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$	$\text{CO}_2(\text{gaz})$	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{N}_4(\text{solide})$
$\Delta_f H^\circ$ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	$-2,5 \cdot 10^2$	$-4,0 \cdot 10^2$	$1,23 \cdot 10^2$

II.1 - La combustion des tablettes d'hexamine solide

Le but de cette sous-partie est de vérifier le pouvoir calorifique annoncé par le fournisseur.

Q27. La réaction de combustion dans l'air s'écrit



où a, b, c et d sont des coefficients stœchiométriques.

Déterminer a, b, c, d.

Q28. Que valent les enthalpies standard de formation du diazote gazeux et du dioxygène gazeux à 25 °C ? Justifier.

Q29. Déterminer numériquement l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ$ de la réaction (5) à 25 °C. On suppose cette grandeur indépendante de la température.

Pourquoi la valeur trouvée est-elle cohérente avec le fait que la réaction est une combustion ?

Le pouvoir calorifique est le transfert thermique libéré lors de la combustion complète d'un kilogramme de combustible sous une pression de 1 bar et à une température de 25 °C.

Q30. Démontrer avec soin que le pouvoir calorifique de l'hexamine est : $PC = -\frac{\Delta_r H^\circ}{M_h}$. On précisera entre autres les conditions d'application des lois utilisées.

Q31. Calculer numériquement PC. La donnée fournisseur est-elle juste ?

Q32. Lorsque l'on monte en altitude, la pression diminue. On suppose que la réaction (5) reste un équilibre. Quel est l'effet de cette diminution de pression à température constante sur l'équilibre ? Le réchaud restera-t-il performant en altitude ?

On s'interroge maintenant sur l'affirmation lue sur le site du fournisseur : « Deux tablettes de 4 grammes permettent de faire bouillir 0,25 litre d'eau en 5 minutes ».

Q33. Quelle est la valeur numérique de l'énergie délivrée lors de la combustion des deux tablettes de combustible sous 1 bar et à 25 °C ? On utilisera le pouvoir calorifique fourni dans le **document 2**, page 7.

Q34. On considère le système thermodynamique fermé constitué par un volume $V = 0,25$ L d'eau liquide. On le chauffe de manière monobare (pression extérieure constante égale à 1 bar) depuis une température de $T_1 = 20$ °C jusqu'à une température $T_2 = 100$ °C (température d'ébullition sous 1 bar). Déterminer, en justifiant soigneusement, l'expression littérale du transfert thermique reçu par l'eau lors de ce chauffage. Faire l'application numérique.

Q35. En conséquence, quel est le rendement espéré par le fournisseur lorsqu'il affirme « deux tablettes de 4 grammes permettent de faire bouillir 0,25 litre d'eau » ?

Une fois l'eau portée à ébullition, il faut encore apporter de l'énergie au système contenu dans la casserole pour maintenir l'ébullition.

Q36. Déterminer, en justifiant soigneusement, l'expression littérale du transfert thermique reçu par l'eau lors de la vaporisation monobare d'un volume $V' = 0,05$ L d'eau liquide déjà portée à 100 °C. Faire l'application numérique. Commenter.

Q37. Dans le set de cuisson, on dispose d'un couvercle. Quel est son rôle ? Nommer précisément un phénomène physique en partie évité grâce au couvercle.

II.2 - Utilisation du réchaud en altitude

Tout randonneur chevronné sait que le temps de cuisson des aliments dans l'eau bouillante change avec l'altitude. Ceci est lié au fait que la pression atmosphérique diminue avec l'altitude. On cherche ici à retrouver la loi d'évolution de la pression avec l'altitude.

Le graphe de la fonction $f(x) = \exp(-x)$ figure en fin d'énoncé.

On rappelle la loi fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme, donnant les variations de la pression p avec l'altitude z (l'axe des z est vertical ascendant)

$$\frac{dp}{dz} = -\mu_{air} g \quad (6)$$

où μ_{air} est la masse volumique de l'air et g la norme de l'accélération de la pesanteur supposée uniforme.

L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique de masse molaire M_{air} . L'atmosphère est supposée isotherme. On note T_o la température et p_o la pression à altitude nulle : $z = 0$. R est la constante des gaz parfaits.

Q38. Pourquoi considère-t-on l'air comme un gaz diatomique ?

Q39. Déterminer l'expression de la masse volumique de l'air en fonction de p , R , T_o et M_{air} .

Q40. En déduire que p est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dz} + \frac{p}{D} = 0 \quad (7)$$

où on exprimera D en fonction de g , R , T_o et M_{air} .

Q41. Déterminer, en justifiant, l'unité de D à l'aide de l'équation différentielle, puis à l'aide de son expression. On l'exprimera à partir des unités de base du Système International.

Q42. Déterminer l'expression de p en fonction de z , de la pression p_o et de D . Cela confirme-t-il que la pression diminue avec l'altitude ?

Q43. D est de l'ordre de 8 km. Que vaut la pression atmosphérique à 2 km d'altitude sachant que p_o vaut 1 bar ?

Q44. On donne, **figure 3**, page 10, l'allure du diagramme d'équilibre pression-température du corps pur eau. Recopier ce diagramme et identifier les domaines. Préciser le nom du point d'intersection des trois courbes qui y apparaissent.

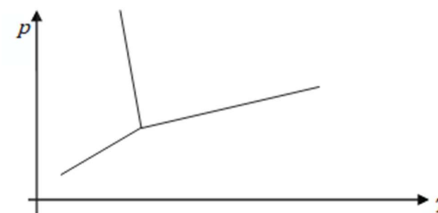


Figure 3 - Diagramme pression – température du corps pur eau

Q45. On assimile l'ébullition à une vaporisation. Justifier à l'aide du diagramme de la **figure 3**, page 10 que la température d'ébullition diminue avec l'altitude.

On donne, **figure 4**, la courbe d'évolution de la pression de vapeur saturante en bar (ou pression d'équilibre liquide-vapeur) de l'eau en fonction de θ , la température en degrés Celsius.

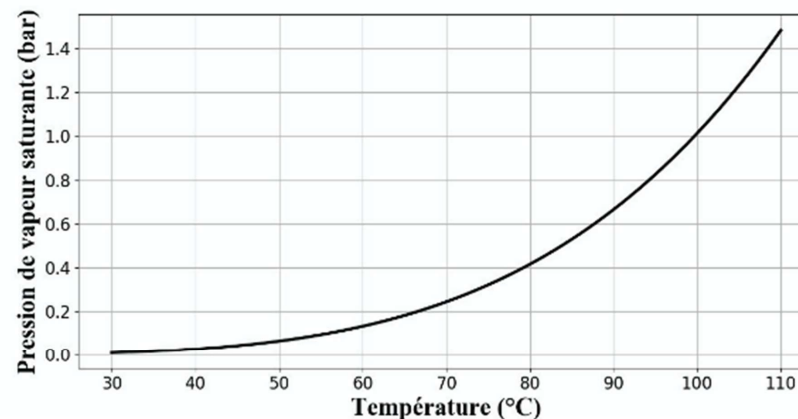


Figure 4 - Graphe de $p_s(\theta)$

Q46. Déterminer la température d'ébullition de l'eau à 2 km d'altitude. La cuisson des aliments dans l'eau bouillante va-t-elle être plus longue ou plus courte en altitude ?