Correction DM 2

5. Par définition de l'intensité d'un courant :

$$i = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

6. En convention récepteur l'expression $U(t)i(t)$ est la puissance électrique $p(t)$ échangée entre le système condensateur et le reste de circuit :

$$\boldsymbol{p(t)} = U(t)i(t) = U(t)C\frac{dU(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CU^2(t)\right) = \frac{d}{dt}(\mathcal{E}_{stockée}) \text{ avec } \mathcal{E}_{stockée} = \frac{1}{2}CU^2$$

7. Le Tram parcourt $d = 400\ m$ à la vitesse de $15 km.h^{-1}$ en un temps :

$$t = \frac{d}{v} = \frac{400m}{\frac{15.10^3 m}{3600s}} = \frac{400 * 3600}{15.10^3}s = \frac{40}{15}36s = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{15}}4 * 36s = \mathbf{2}\frac{4 * 3{,}6}{\mathbf{3}}10s = 2 * 48s = 96s$$

L'énergie moyenne nécessaire pour un trajet entre deux stations est donnée par :

$$\mathcal{E}_{totale} = \int_0^t p(t)dt = p_{moyenne}(t-0) = 500.10^3 W * 9{,}6s = 5 * 96.10^5 J = 48.10^6 = 48MJ$$

$$rappel: \quad p(t) = \frac{dE}{dt} \Leftrightarrow E(t) = \int_0^t p(t)dt \quad (énergie\ fournie\ entre\ 0\ et\ t).$$

8. Les 48 condensateurs identiques fournissent l'énergie $\mathcal{E}_{totale}$ (en réalité il faut tenir compte de l'énergie dissipée dans les résistances qui compte pour moitié !) donc chaque condensateur a une énergie :

$$\mathcal{E}_C = \frac{\mathcal{E}_{totale}}{48}$$

$$C = 2\frac{\mathcal{E}_{totale}}{48U^2} = \frac{2}{48}\frac{48.10^6}{7{,}5^2.10^4} = \frac{2}{\mathbf{48}}\frac{\mathbf{48}.10^6}{7{,}5^2.10^4} = \frac{200}{7{,}5^2} = 3{,}6F$$

9. En considérant que le temps du régime transitoire (charge du condensateur à 1% près ie $Uc = 99\% U_{generateur}$)) est $t_{charge} = 5RC$:

$$R = \frac{t_{charge}}{5C} = \frac{20}{5 * 3{,}6} = \frac{4}{3{,}6} = \frac{3{,}6 + 0{,}4}{3{,}6} \approx \frac{3{,}6 + 0{,}36}{3{,}6} = 1{,}1\Omega$$

10. On pose $\eta = kE^aR^bC^d$ ou k est un facteur numérique sans dimension, on cherche à démontrer par un raisonnement dimensionnel (ou unité) que $a = 0 = b = 0 = c$ sachant que $\dim(\eta) = 1$ (égalité traduisant que η est sans dimension comme le facteur numérique k).

On a donc :

$$\dim(\eta) = 1 = \dim(k)\dim(E)^a\dim(R)^b\dim(C)^d = \dim(E)^a\dim(R)^b\dim(C)^d$$

Or

$$\dim(R) = \dim\left(\frac{RI}{I}\right) = \frac{\dim(E)}{A} \text{ et } \dim(C) = \dim\left(\frac{I}{\frac{dU}{dt}}\right) = \dim\left(\frac{IT}{U}\right) = \frac{AT}{\dim(E)}$$

Donc :

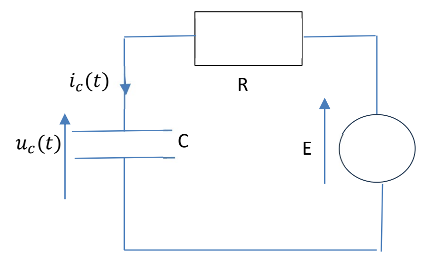
$$1 = \dim(E)^a\left(\frac{\dim(E)}{A}\right)^b\left(\frac{AT}{\dim(E)}\right)^c$$

$$1 = \dim(E)^{a+b-c}A^{c-b}T^c$$

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ c - b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

η ne dépend pas des valeurs de R, C et E.

11. On fait un schéma du circuit avec les notations de l'énoncé :



On applique une loi des mailles, on obtient :

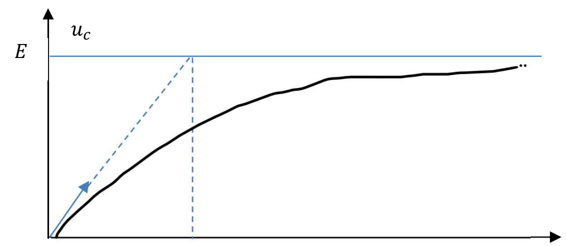
$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec } \tau = RC$$

12. La tension du condensateur est une fonction continue du temps et le condensateur est déchargé avant la fermeture du circuit : $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0$.

13. L'équation différentielle (q 11) sans second membre a pour solution générale $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ et une solution particulière de l'équation complète est $u_c = E$ donc la solution de l'équation complète s'écrit :

$$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E \text{ avec } u_c(0) = 0 \text{ donc } u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

14.



15. L'énergie stockée en fin de charge est :

$$E_{stockée} = \frac{1}{2}C\left(\lim_{t\to+\infty} u_c(t)^2\right) = \frac{1}{2}CE^2$$

16. On a :

$$i(t) = C\frac{du_c}{dt} = \frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

17. En convention récepteur l'énergie échangée entre le condensateur et le circuit durant un temps t s'écrit :

$$\mathcal{E}(t)=\int_0^t u_c(t)i(t)dt=C\int_0^t u_c(t)\frac{du_c}{dt}dt=\frac{1}{2}Cu_c^2(t)-\frac{1}{2}Cu_c^2(0)=\frac{1}{2}Cu_c^2(t)$$

En fin de charge

$$\mathcal{E}_{stockée}=\frac{1}{2}CE^2$$

18. L'énergie fournie $\mathcal{E}_{fournie}$ par le générateur durant le temps de charge est :

$$\mathcal{E}_{fournie}=\int_0^{+\infty} u_{générateur}\,idt=\int_0^{+\infty} E\,C\frac{du_c}{dt}dt=CE[U_c(t)]_0^{+\infty}=CE^2=2\mathcal{E}_{stockée}$$

Le rendement de la charge est donc :

$$r=\frac{\mathcal{E}_{stockée}}{\mathcal{E}_{fournie}}=\frac{1}{2}$$

19. La situation est identique au calcul précédent à l'exception de la tension du générateur égale dans la nouvelle situation à $E/2$ donc :

$$u_c(t)=\frac{E}{2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

20. On cherche le temps t_1 tel que :

$$u_c(t_1)=0{,}99\frac{E}{2}\Leftrightarrow 1-e^{-\frac{t_1}{\tau}}=0{,}99\Leftrightarrow t_1=2\tau\ln(10)\approx 5\tau$$

21. u_c vérifie l'équation différentielle :

$$\text{pour } t\geq t_1:\ \frac{du_c}{dt}+\frac{u_c}{\tau}=\frac{E}{\tau}\ \text{avec}\ u_c(t_1^+)=u_c(t_1^-)=\frac{E}{2}$$

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\text{pour } t\geq t_1:\ u_c(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}+E\ \text{avec}\ \ u_c(t_1)\approx\frac{E}{2}$$

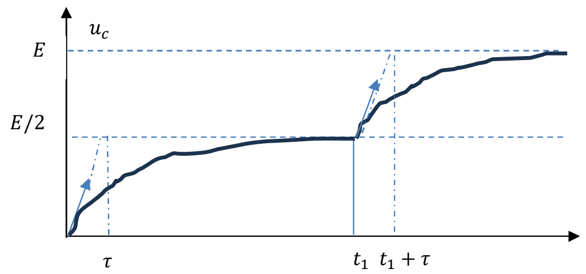
Donc :

$$\frac{E}{2}=u_c(t_1)=Ae^{-\frac{t_1}{\tau}}+E\ \Longrightarrow A=-\frac{E}{2}e^{\frac{t_1}{\tau}}$$

Finalement :

$$\text{pour } t\geq t_1:\ u_c(t)=-\frac{E}{2}e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}+E\ \text{avec}\ \ u_c(t_1)=\frac{E}{2}$$

22.



23. On a :

$$u_c(t)=\begin{cases}\frac{E}{2}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\text{ pour } 0\leq t\leq t_1\\ -\frac{E}{2}e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}+E\text{ pour } t\geq t_1\end{cases}$$

$$i(t)=C\frac{du_c(t)}{dt}=\begin{cases}\frac{CE}{2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\text{ pour } 0\leq t\leq t_1\\ \frac{CE}{2\tau}e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}\text{ pour } t\geq t_1\end{cases}=\begin{cases}\frac{E}{2R}e^{-\frac{t}{\tau}}\text{ pour } 0\leq t\leq t_1\\ \frac{E}{2R}e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}\text{ pour } t\geq t_1\end{cases}$$

24. L'énergie fournie par le générateur au circuit s'écrit (*) :

$$\mathcal{E}_{fourniepargenerateurs}=\int_0^{+\infty}u_{generateur}(t)i(t)dt=\int_0^{t_1}\frac{E}{2}\frac{E}{2R}e^{-\frac{t}{\tau}}dt+\int_{t_1}^{+\infty}E\frac{E}{2R}e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}dt$$

$$\int_0^{t_1}\frac{E}{2}\frac{E}{2R}e^{-\frac{t}{\tau}}dt=\frac{E^2}{4R}\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_1}=-RC\frac{E^2}{4R}\left(e^{-\frac{t_1}{\tau}}-1\right)=\frac{CE^2}{4}(1-e^{-5})\approx\frac{CE^2}{4}$$

$$\int_{t_1}^{+\infty}E\frac{E}{2R}e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}dt=\frac{E^2}{2R}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t}{\tau}}dt=\frac{E^2}{2R}\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{+\infty}=-RC\frac{E^2}{2R}\left(e^{-\frac{\infty}{\tau}}-1\right)=\frac{CE^2}{2}$$

L'énergie fournie par les générateurs est donc :

$$\mathcal{E}_{fourniepargenerateurs}=\frac{CE^2}{4}+\frac{CE^2}{2}=\frac{3}{4}CE^2$$

Par contre on a toujours :

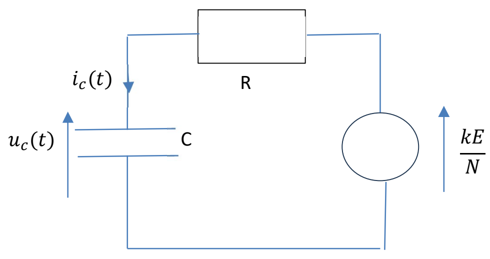
$$\mathcal{E}_{stockée}=\frac{1}{2}CE^2$$

$$\mathcal{E}_{stockée}=\int_0^{+\infty}u_c(t)i(t)dt=\int_0^{+\infty}u_c(t)\frac{Cdu_c}{dt}dt=\left[\frac{1}{2}Cu_c^2(t)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}C\big(u_c(+\infty)\big)^2-\frac{1}{2}C\big(u_c(0)\big)^2=\frac{1}{2}CE^2$$

25. Le rendement de ce deuxième dispositif s'écrit :

$$\eta=\frac{\mathcal{E}_{stockée}}{\mathcal{E}_{fourniepargenerateurs}}=\frac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{3}{4}CE^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

26.



La loi des mailles donne :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{k}{N}\frac{E}{\tau} \quad \text{avec } \tau = RC$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$u_c(t) = \frac{kE}{N} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } u_c(t_{k-1}^+) = u_c(t_{k-1}^-) = \frac{k-1}{N}E$$

Calcul de A :

$$u_c(t_{k-1}) = \frac{kE}{N} + Ae^{-\frac{t_{k-1}}{\tau}}$$

$$\frac{k-1}{N}E = \frac{kE}{N} + Ae^{-\frac{t_{k-1}}{\tau}} \Leftrightarrow = -\frac{E}{N} = Ae^{-\frac{t_{k-1}}{\tau}} \Leftrightarrow A = -\frac{E}{N}e^{\frac{t_{k-1}}{\tau}} = -\frac{E}{N}e^{5(k-1)}$$

$$u_c(t) = \frac{kE}{N} - \frac{E}{N}e^{5(k-1)}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{N}\left(k - e^{-\frac{t}{\tau}}e^{5(k-1)}\right)$$

27. On a :

$$i(t) = C\frac{dU_c}{dt} = \frac{CE}{\tau N}e^{-\frac{t}{\tau}}e^{5(k-1)} = \frac{E}{RN}e^{-\frac{t}{\tau}}e^{5(k-1)}$$

28. $E_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{Ek}{N}\frac{E}{NR}e^{-\frac{t}{k}}e^{5(k-1)}dt = \frac{E^2k}{RN^2}e^{5(k-1)}\left[-\tau e^{-\frac{t}{k}}\right]_{5(k-1)\tau}^{5k\tau} = -\tau\frac{E^2k}{RN^2}e^{5(k-1)}\left(e^{-5k} - e^{-5(k-1)}\right)$

$$E_k = -RC\frac{E^2k}{RN^2}(e^{-5} - 1) = CE^2\frac{k}{N^2}(1 - e^{-5}) \approx CE^2\frac{k}{N^2}$$

29. L'énergie totale fournie au bout de N étapes :

$$\boldsymbol{E_N} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} E_k = \frac{CE^2}{N^2}\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}} k = \frac{CE^2}{N^2}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2}CE^2\frac{N+1}{N} = \frac{1}{2}CE^2\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

30. D'après l'énoncé :

$$\eta(N) = \frac{E_{stockée}}{E_{fournie\ en\ Nétapes}} = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{1}{2}CE^2\left(1+\frac{1}{N}\right)} = \frac{N}{N+1}$$

Et bien sûr :

$$\lim_{N\to+\infty}\eta(N) = 1^-$$

31. Système étudiée résistance, la résistance reçoit (algébriquement !) :

- de la part du circuit (via les électrons libres traversant la résistance) une énergie électrique

$$\mathcal{E}_{electrique} = \int_0^{\Delta t} P(t)dt = \int_0^{\Delta t} u(t)i(t)dt = \int_0^{\Delta t} Ri^2(t)dt = Ri^2\Delta t$$

- de la part de l'atmosphère un transfert thermique $Q = \mathcal{E}_{thermique}$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$U_{finale} - U_{initiale} = \mathcal{E}_{electrique} + \mathcal{E}_{thermiqu}$$

En régime stationnaire :

$$U_{finale} - U_{initiale} = 0$$

Donc :

$$\mathcal{E}_{thermique} = -Ri^2\Delta t < 0$$

Il y a conversion d'énergie électrique en énergie thermique (énergie d'agitation thermique) : les électrons entrant dans la résistance transfèrent par 'chocs' une partie de leur énergie électrique aux atomes constitutifs de la résistance.

Ces atomes vibrent avec une amplitude plus importante, ce qui se traduit par une augmentation de la température de la résistance. Ce transfert d'énergie se diffuse vers la surface de contact de la résistance à l'air (c'est la conduction thermique : transfert thermique sans transfert de matière).

En régime stationnaire l'énergie électrique fournie aux atomes de la résistance est compensée par le transfert thermique de la résistance vers l'air ambiant.