

CONCOURS ATS
-SESSION 2024-

ÉPREUVE DE
SCIENCES PHYSIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 957

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Piscine

Introduction

Ce sujet étudie différents aspects physiques qui concernent une piscine. Il est constitué de quatre parties indépendantes. Les différentes sous-parties sont souvent également indépendantes.

I Bilan thermique du bassin



Document 1 : photographie du bassin étudié.

Source images et données de la partie I : www.theses.fr/s240136

Le bassin étudié est situé sur l'île de la Réunion, dans la commune de Saint-Paul.

Données générales :

- Dimensions du bassin : 12,5 m de large et 25 m de long. On retiendra une surface S d'environ 300 m^2 et un volume V d'environ 500 m^3 .
- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c = 4,2 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Enthalpie massique de vaporisation de l'eau : $\Delta h_{\text{vap}} = 2,3 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

I.1 Courbe de refroidissement

On note $T(t)$ la température de l'eau et T_0 la température de l'air extérieur. On note C la capacité thermique totale de l'eau du bassin.

- 1 - À l'aide des données de l'énoncé, donner la valeur numérique de C .

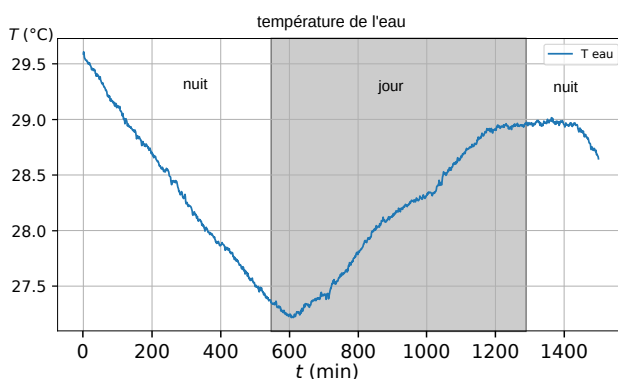
De nuit, et en l'absence de chauffage, un bilan thermique permet de montrer que $T(t)$ suit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_0}{\tau}, \quad (1)$$

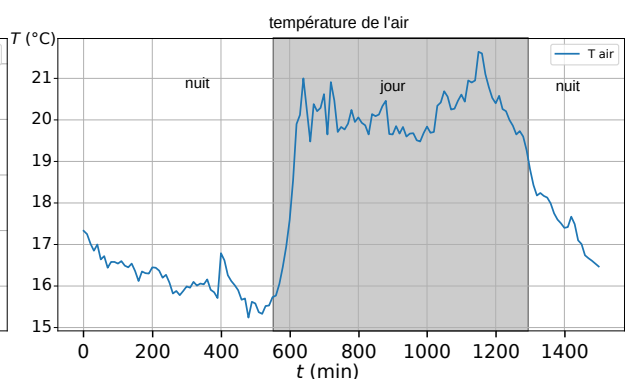
avec $\tau = RC$ et R la résistance thermique équivalente qui rend compte des échanges entre l'eau et le milieu extérieur.

On suppose T_0 constante. On note T_i la température de l'eau à $t = 0$.

- 2 - Résoudre l'équation différentielle précédente et donner l'expression de $T(t)$ en fonction de T_i , T_0 , τ et t .
- 3 - Tracer l'allure du graphique qui donne T en fonction de t pour la solution $T(t)$ obtenue. On supposera $T_i > T_0$. On indiquera sur le graphique la valeur initiale de $T(t)$ et la valeur finale de $T(t)$ aux temps longs.
- 4 - À l'aide d'un développement limité pour $t \ll \tau$, mettre $T(t)$ sous la forme $T(t) = at + b$, et donner les expressions de a et de b en fonction de T_i , T_0 et τ . On rappelle pour cela que pour $|x| \ll 1$, $e^x \simeq 1 + x$.
- 5 - En exploitant le graphique du document 2, proposer une estimation de la valeur de τ .



Document 2 : évolution de la température de l'eau. L'eau n'est pas chauffée la nuit, alors qu'elle l'est le jour.



Document 3 : évolution de la température de l'air sur la même période que pour le document 2.

I.2 Causes de refroidissement

On s'intéresse à l'évolution de la température de l'eau $T(t)$ entre les instants $t_i = 0$ et $t_f = 500$ min. Le document 2 montre que la température passe de $T_i = 29,6^\circ\text{C}$ à $T_f = 27,5^\circ\text{C}$. Cette phase a lieu de nuit, sans chauffage. L'eau de la piscine est modélisée comme un fluide incompressible et indilatable et constitue un système fermé.

- 6 - Donner l'expression de la variation d'enthalpie, ΔH_1 , associée à ce changement de température de l'eau de la piscine durant cette période. Calculer sa valeur.

Plusieurs phénomènes physiques sont responsables du refroidissement de l'eau du bassin. Ils sont discutés à tour de rôle dans la suite.

I.2.1 Refroidissement par évaporation

L'évaporation est une des causes principales de refroidissement de l'eau d'une piscine. La piscine est instrumentée pour pouvoir suivre son niveau d'eau, qui varie sous l'effet de l'évaporation. Le débit d'évaporation D_v est le volume d'eau qui s'évapore en surface (au contact de l'air) par unité de temps. Entre les instants $t_i = 0$ et $t_f = 500$ min, il est mesuré en moyenne à $D_v \simeq 2$ L/min.

- 7 - Donner l'expression de la variation d'enthalpie, ΔH_2 , associée à l'évaporation durant cette période.
- 8 - Faire l'application numérique. On pourra se référer aux données générales.
- 9 - Expliquer qualitativement pourquoi le processus d'évaporation entraîne une diminution de la température de l'eau.

I.2.2 Refroidissement par échange avec l'air

Les échanges par conduction et convection à la surface de l'eau sont une autre source de refroidissement. On estime la puissance thermique cédée par l'eau au milieu extérieur via les échanges conducto-convectifs avec l'air en utilisant la loi de Newton :

$$\mathcal{P}_{\text{air}} = \varepsilon hS(T - T_{\text{air}}),$$

avec T la température de l'eau et T_{air} celle de l'air, S la surface du bassin, $h \simeq 5 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-2}$ le coefficient conducto-convectif et ε un paramètre valant plus ou moins 1.

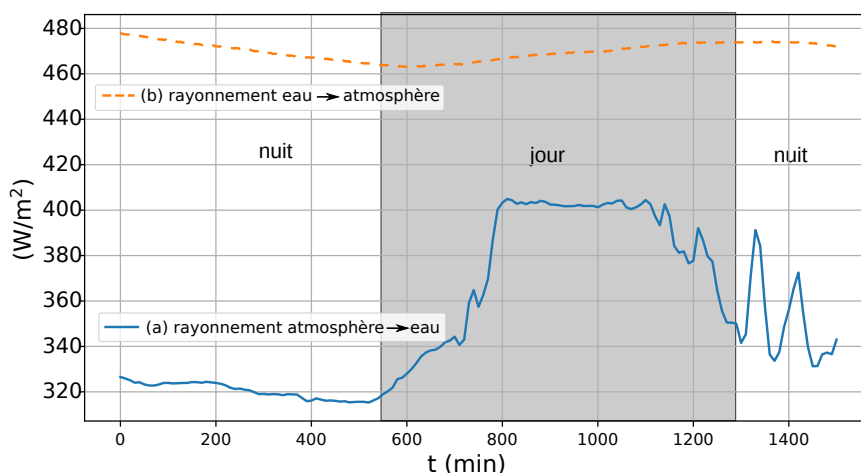
- 10 - Indiquer en justifiant si $\varepsilon = +1$ ou si $\varepsilon = -1$.
- 11 - On note Q_{air} le transfert thermique cédé par l'eau au milieu extérieur via les échanges conducto-convectifs avec l'air. On l'évalue sur la période entre $t_i = 0$ et $t_f = 500$ min. Donner la relation qui relie Q_{air} , \mathcal{P}_{air} , t_i et t_f .
- 12 - À l'aide des données générales et des documents 2 et 3, estimer la valeur numérique de Q_{air} . On fera pour cela des hypothèses qui permettent de simplifier les calculs.

I.2.3 Refroidissement par rayonnement

Le dernier terme de transfert, Q_{IR} , est celui par rayonnement. Il possède deux contributions :

- a/ D'une part, l'eau reçoit un transfert thermique Q_a de la part de l'atmosphère qui l'entoure. La puissance thermique surfacique associée est mesurée par un capteur sensible au rayonnement infrarouge (courbe du bas sur le document 4).
- b/ D'autre part, l'eau cède un transfert thermique Q_b vers l'atmosphère en émettant un rayonnement dans l'infrarouge. La puissance thermique surfacique associée est calculée à partir de la connaissance de la température de l'eau (courbe du haut sur le document 4).

Q_{IR} est alors défini par : $Q_{\text{IR}} = |Q_b| - |Q_a|$.



Document 4 : puissances thermiques surfaciques liées au rayonnement infrarouge, en watt par mètre carré de surface de bassin.

- 13 - À l'aide du document 4 et des données générales, estimer la valeur du transfert thermique Q_{IR} cédé par l'eau à l'atmosphère entre $t_i = 0$ et $t_f = 500$ min.

I.2.4 Bilan

Cette sous-partie utilise les résultats obtenus dans le I.2 afin de tester la cohérence des valeurs numériques calculées. On notera que la perte d'énergie par les parois et le fond de la piscine, non estimée ici, est négligeable.

- 14 - Exprimer ΔH_1 en fonction de ΔH_2 , Q_{air} et Q_{IR} .
Cette relation est-elle vérifiée numériquement avec les valeurs obtenues dans les questions précédentes ?
- 15 - Quel est le terme de pertes dominant ? Qu'est-il possible de faire pour diminuer sa contribution ?

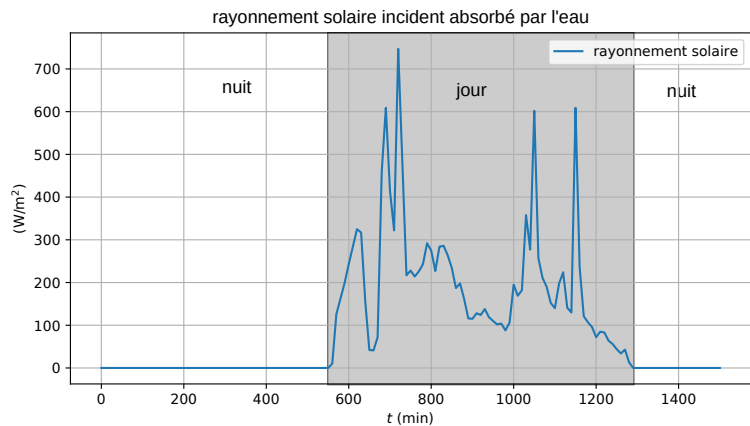
I.3 Apports d'énergie

I.3.1 Rayonnement solaire

Le rayonnement solaire est un apport important d'énergie. Un capteur permet d'enregistrer la puissance thermique surfacique de ce rayonnement (document 5). Notons-la y . Afin d'obtenir le transfert thermique reçu, il faut intégrer cette puissance et la multiplier par la surface S du bassin :

$$Q_{\text{solaire}} = \int_0^{t_{\text{fin}}} y(t) dt \times S. \quad (2)$$

Il est nécessaire de calculer cette intégrale numériquement à partir des données.



Document 5 : puissance thermique surfacique liée au rayonnement solaire direct.

On dispose de tableaux, déjà définis dans l'algorithme, qui contiennent les données suivantes :

- \mathbf{t} contient les instants auxquels les enregistrements ont lieu, en minutes.
- \mathbf{y} contient les valeurs de la puissance thermique surfacique du rayonnement solaire reçu, c'est-à-dire que y_i est la valeur du rayonnement à l'instant t_i , en W m^{-2} .

16 - Proposer l'instruction manquante dans l'algorithme ci-dessous, afin qu'il retourne bien la grandeur Q_{solaire} en joules. On utilisera la méthode des rectangles pour le calcul de l'intégrale.

On notera que l'algorithme de gauche est écrit en langage Scilab, celui de droite en langage Python, et le candidat choisira de travailler avec l'un ou l'autre des langages. **Il indiquera lequel sur sa copie.**

Scilab

```
n = length(t)
somme = 0
for i=1:n-1
    // À COMPLÉTER
end

disp(somme*300) // affiche l'énergie
                // reçue, en joules
```

Python

```
n = len(t)
somme = 0
for i in range(n-1):
    # À COMPLÉTER

print(somme*300) # affiche l'énergie
                 # reçue, en joules
```

17 - On obtient $Q_{\text{solaire}} = 2,8 \text{ GJ}$. Ceci est-il suffisant pour maintenir l'eau de la piscine à une température raisonnable? On justifiera en comparant cette valeur à une ou plusieurs grandeurs calculées précédemment.

I.3.2 Pompe à chaleur

L'eau de la piscine est maintenue à une température proche de $T_c = 28^\circ\text{C}$ grâce à une pompe à chaleur (PAC). Cette dernière fonctionne entre la source chaude {eau} à T_c et la source froide {air atmosphérique} à $T_f = 20^\circ\text{C}$.

On considère un cycle de fonctionnement de la pompe à chaleur. On note Q_c le transfert thermique reçu par la PAC de la part de la source chaude, Q_f celui reçu par la PAC de la part de la source froide, et W le travail reçu par la PAC depuis le réseau électrique.

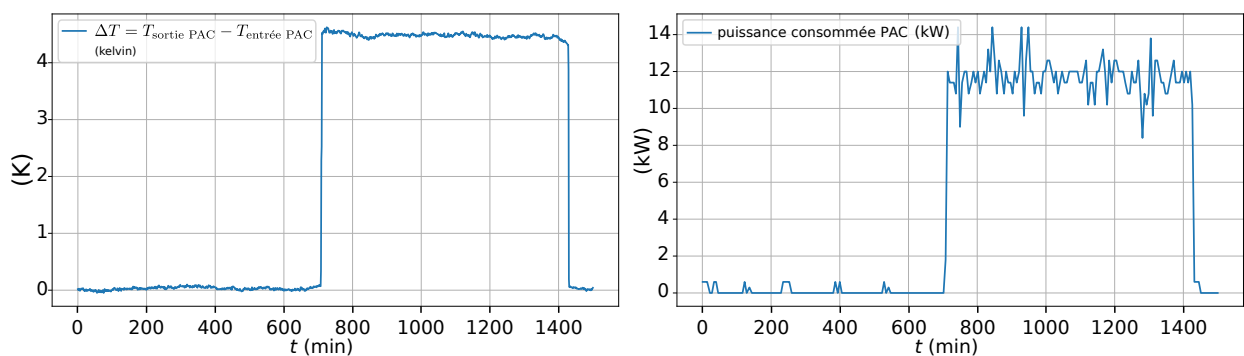
18 - Donner les signes de Q_c , Q_f et W .

19 - Définir l'efficacité e , ou coefficient de performance (COP), de la PAC en fonction de grandeurs parmi Q_f , Q_c et W .

20 - On suppose le fonctionnement réversible. À l'aide d'un bilan sur un cycle, établir l'expression de l'efficacité e en fonction des températures.

21 - Calculer la valeur numérique approchée de e .

Nous étudions maintenant la PAC en conditions réelles, sans l'hypothèse de réversibilité du cycle. L'eau de la piscine s'écoule dans un échangeur thermique, où elle reçoit un certain transfert thermique massique. Entre l'entrée et la sortie de cet échangeur, sa température s'élève de ΔT (document 6, graphique de gauche). Le débit volumique est $D_v = 20\text{ m}^3/\text{h}$. La puissance électrique consommée par la pompe est tracée sur le document 6 (graphique de droite).



Document 6 : relevés expérimentaux pour la pompe à chaleur.

22 - (Résolution de problème) Estimer l'efficacité réelle de la PAC. On fera l'application numérique.

Remarque : cette question est peu guidée et nécessite de l'initiative. Les pistes de recherche doivent apparaître sur la copie et, si elles sont pertinentes, seront valorisées. De plus, le candidat effectuera les approximations nécessaires pour que les calculs restent simples.

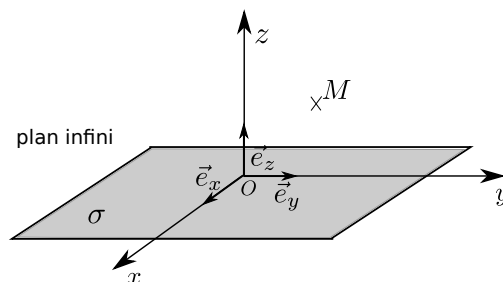
II Étude du capteur de niveau d'eau

Le suivi du niveau d'eau dans la piscine est essentiel pour commander son remplissage, détecter des fuites ou encore étudier l'évaporation. Nous étudions ici un capteur de type capacitif.

On donne la permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

II.1 Étude du condensateur plan

On considère d'abord un plan infini, chargé avec une densité surfacique de charge σ uniforme. On utilise le repère de la figure ci-contre. \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z sont des vecteurs unitaires.



Document 7

23 - Par des arguments d'invariance et de symétrie, établir la direction du champ électrique créé par ce plan, en un point M quelconque de l'espace, ainsi que les variables dont il dépend.

24 - Par un argument de symétrie, montrer que $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$.

25 - Démontrer que le champ électrique a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z > 0, \text{ et } \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } z < 0. \quad (3)$$

Pour la démonstration, on fera un schéma de la surface de Gauss considérée.

On étudie maintenant un condensateur. On le modélise par deux plans parallèles, chacun de surface S . On note Oz l'axe orthogonal aux plans. Le plan en $z = 0$ porte une densité surfacique de charge $-\sigma$, et le plan en $z = e$ (avec e distance positive) porte une densité surfacique de charge $+\sigma$. On néglige tout effet de bord.

26 - À l'aide d'un schéma, montrer que le champ électrique est non nul dans une certaine zone de l'espace et nul ailleurs. Donner l'expression du champ dans la zone où il est non nul.

On note $U = V(e) - V(0)$ la différence de potentiel électrostatique entre les deux plans. On rappelle que la capacité C d'un condensateur est définie par la relation $Q = CU$ avec Q la charge de l'armature positive.

27 - Établir l'expression de C en fonction de ε_0 , S et e .

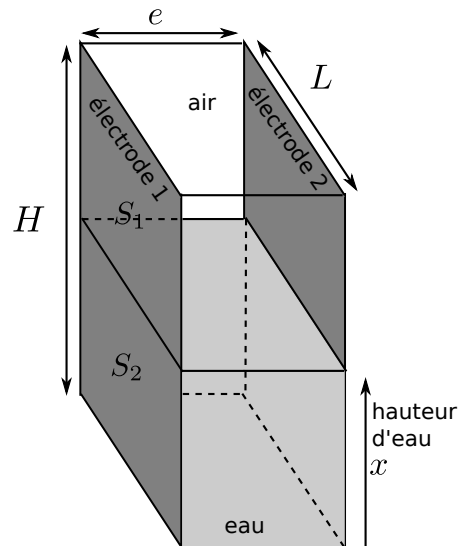
II.2 Application au capteur de niveau d'eau

Le principe du capteur est schématisé ci-contre. Dans un milieu de permittivité diélectrique relative ε_r , l'expression de la capacité d'un condensateur plan s'écrit :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}. \quad (4)$$

On a $\varepsilon_r = 1$ pour l'air et $\varepsilon_r = 80$ pour l'eau.

Le capteur est équivalent à deux condensateurs C_1 et C_2 placés en parallèle, l'un situé dans l'air (surface des électrodes S_1 dans l'air) et l'autre dans l'eau (surface des électrodes S_2 dans l'eau). Les capacités de ces deux condensateurs placés en parallèle s'additionnent.



Document 8

- 28 - Établir l'expression de la capacité totale $C = C_1 + C_2$, et l'écrire sous la forme $C = ax + b$, avec a et b des constantes à exprimer en fonction des dimensions H , L et e du condensateur, de ϵ_0 et de la permittivité diélectrique relative ϵ_r de l'eau.

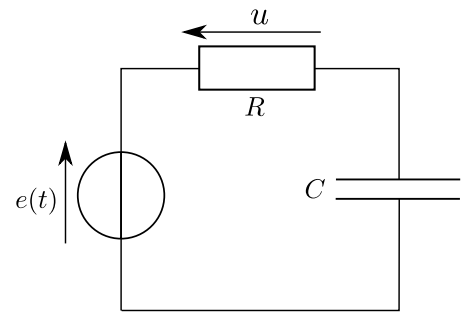
Pour mesurer la valeur de C , on place le capteur dans un montage électrique (document 9). Le générateur de tension impose une tension $e(t) = A \cos \omega t$ avec $A > 0$.

On mesure alors la tension u aux bornes de la résistance. On admet qu'elle vérifie l'équation suivante :

$$RC \frac{de}{dt} = RC \frac{du}{dt} + u. \quad (5)$$

On utilise le formalisme complexe : $e(t)$ est représenté par $\underline{e}(t) = Ae^{j\omega t}$ et $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ par $\underline{u}(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$.

j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.



Document 9

- 29 - À partir de l'équation (5), établir l'expression de \underline{U}_0 en fonction de A , ω , R et C .
- 30 - Établir l'expression de l'amplitude U_0 de la tension $u(t)$ en fonction des mêmes grandeurs.
- 31 - On se place dans la limite basse fréquence. Préciser ce que cela signifie, et donner alors l'expression approchée de U_0 .
- 32 - Expliquer comment ce montage permet une mesure du niveau d'eau.

II.3 Traitement des données

En pratique, le niveau d'eau peut fluctuer autour de sa valeur moyenne à cause de la présence de vagues. Pour remédier à ceci, plusieurs valeurs du niveau sont relevées dans un intervalle de temps de l'ordre de la minute.

On dispose ainsi de $n = 100$ valeurs de hauteur stockées dans le tableau \mathbf{h} . On les traite à l'aide d'un algorithme (le tableau \mathbf{h} est déjà défini), écrit soit en langage Scilab, soit en langage Python (le candidat choisira de travailler avec l'un ou l'autre des langages et **indiquera lequel sur sa copie**) :

Scilab

Python

```
n = length(h)
somme = 0
for i=1:n
    // instruction 1
end
// instruction 2
disp(moyenne) // affiche la moyenne
```

```
n = len(h)
somme = 0
for i in range(n):
    # instruction 1
# instruction 2
print(moyenne) # affiche la moyenne
```

- 33 - Compléter les instructions 1 et 2 ci-dessus afin que l'algorithme retourne la valeur moyenne du tableau \mathbf{h} .
- 34 - Proposer, sur le même modèle que ci-dessus, un algorithme qui permet de calculer la variance :

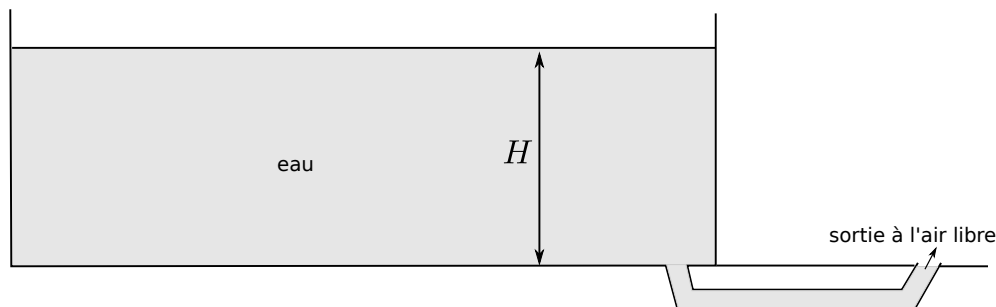
$$V = \frac{1}{n} \sum_i (h_i - \text{moyenne})^2,$$

où l'indice i parcourt toute l'étendue des indices du tableau \mathbf{h} . On supposera que **moyenne** est déjà calculée. On rédigera au choix en Scilab ou en Python.

- 35 - Quel calcul faut-il effectuer pour en déduire l'incertitude-type sur une mesure de h ?

III Vidange du bassin

On envisage de vider le bassin à l'aide d'un tuyau de section $S_t = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ (rayon d'environ 10 cm). La situation simplifiée est schématisée ci-dessous. On note g l'intensité de la pesanteur, $H = 1,7 \text{ m}$ la hauteur initiale d'eau et $S = 300 \text{ m}^2$ la surface du bassin.



Document 10

III.1 Hypothèse d'un débit constant

- 36 - Faire les hypothèses nécessaires pour pouvoir exprimer la vitesse v d'écoulement au point de sortie à l'air libre en fonction de H et de g . Donner cette expression.
- 37 - En déduire une expression du débit volumique d'évacuation de l'eau.
- 38 - En supposant ce débit constant tout au long de la vidange, donner l'expression du temps nécessaire à la vidange complète du bassin, en fonction de H , S , S_t et g .
- 39 - L'application numérique donne une durée de 49 min. En réalité, ce temps sera-t-il plus court ou plus long ? Expliquer quelles en sont les raisons principales.

III.2 Hypothèse d'un débit variable

Dans la suite, on ne fait plus l'hypothèse du débit d'évacuation constant, et on souhaite à nouveau établir l'expression du temps de vidange. Le bassin est supposé de forme parallélépipédique comme sur le document 10. On note $h(t)$ la hauteur d'eau à l'instant t . On a donc $h(0) = H$. On note $v(t)$ la norme de la vitesse en sortie du tuyau, et $v_0(t)$ celle de la surface libre de l'eau (au niveau de la surface S à l'air libre).

- 40 - Donner une relation entre $v_0(t)$, $v(t)$ et les surfaces S et S_t . Expliquer quelle hypothèse permet de l'établir.
- 41 - Montrer que $\frac{dh}{dt}$ est proportionnel à \sqrt{h} :

$$\frac{dh}{dt} = -\alpha\sqrt{h},$$

avec α une constante dont on donnera l'expression.

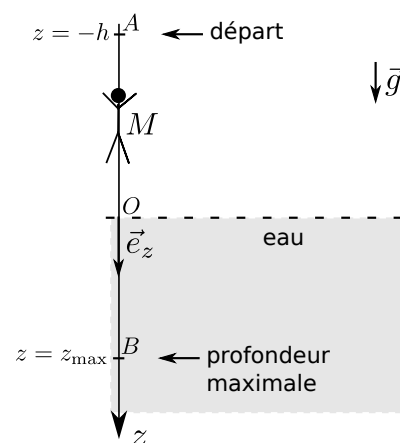
- 42 - Montrer que $h(t) = \left(A - \frac{\alpha t}{2}\right)^2$ est solution de l'équation précédente. Obtenir A à l'aide des conditions initiales.
- 43 - En déduire l'expression du temps de vidange du bassin.
- 44 - Comparer à l'expression obtenue précédemment sous l'hypothèse d'un débit volumique constant.

IV Étude d'un plongeon

Cette dernière partie étudie le plongeon d'un utilisateur de la piscine.

On utilise les notations de la figure ci-contre et les données suivantes :

- Masse du plongeur $m = 80 \text{ kg}$,
intensité de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Le mouvement reste selon l'axe z uniquement.
- Dans l'air, l'énergie potentielle associée au poids s'écrit $E_p = -mgz$.



Document 11

IV.1 Mouvement dans l'air

On étudie d'abord la partie dans l'air. On néglige tout frottement et le plongeur est soumis uniquement à son poids. Le plongeur saute sans vitesse initiale.

45 - Établir l'expression de la vitesse du plongeur lorsqu'il atteint la surface de l'eau en $z = 0$.

Faire l'application numérique pour $h = 10 \text{ m}$.

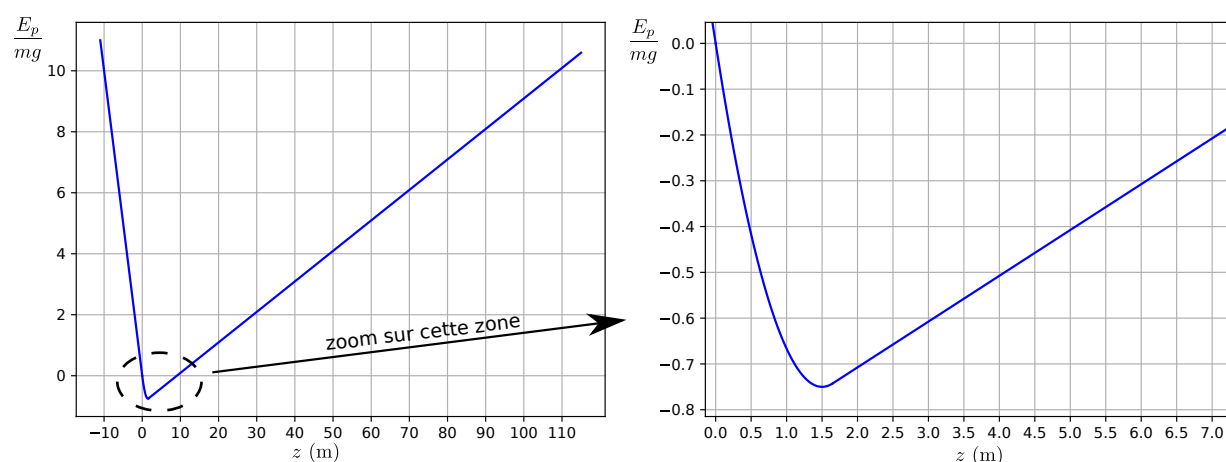
46 - Établir l'équation différentielle suivie par la position $z(t)$.

La résoudre afin d'exprimer $z(t)$.

47 - En déduire l'expression puis la valeur de la durée de la chute en fonction de h et g , avant impact dans l'eau.

IV.2 Mouvement sous l'eau

Dans un premier temps, on néglige la force de frottement exercée par l'eau sur le plongeur, ainsi que le ralentissement lors de l'impact. On prend en compte uniquement le poids et la poussée d'Archimède de l'eau. Le mouvement est alors conservatif, et l'énergie potentielle associée est tracée sur la figure ci-dessous.



Document 12 : énergie potentielle du plongeur en fonction de sa position z .

La référence d'énergie est prise en $z = 0$. Le graphique de droite est un zoom autour de 0. z est la position des pieds du plongeur, qui est supposé toujours rester vertical. La taille du plongeur est de $1,65 \text{ m}$.

48 - Reproduire l'allure du graphique donnant $E_p(z)$ sur votre copie afin d'indiquer la localisation de la position d'équilibre. À quelle valeur de z correspond-t-elle ? Est-ce une position d'équilibre stable ?

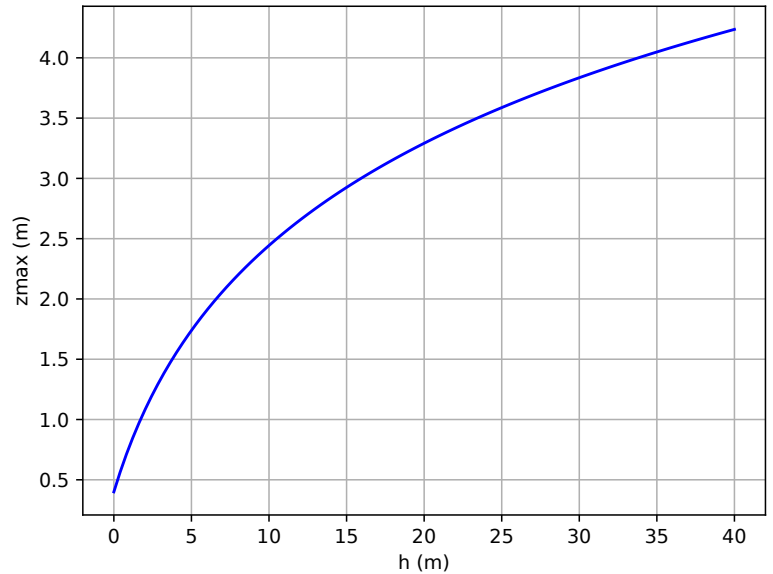
49 - Par une construction graphique, donner la valeur de la profondeur maximale atteinte par le plongeur lorsqu'il saute d'une hauteur initiale de 10 m sans vitesse initiale.

Ce résultat semble-t-il raisonnable? Quel ingrédient manque-t-il à notre modélisation?

On prend maintenant en compte la force de frottement que l'eau exerce sur le plongeur. Un modèle plus détaillé et non développé ici permet d'obtenir la figure ci-contre, donnant la profondeur maximale atteinte pour une hauteur de plongeon donnée.

On cherche à estimer la valeur moyenne de la force de frottement de l'eau. On note \vec{F} cette force et $F > 0$ sa norme, et on la suppose constante au cours du mouvement sous l'eau.

50 - Définir le travail de \vec{F} entre le point O d'entrée dans l'eau et le point B où la profondeur maximale est atteinte. L'exprimer en fonction de F et de $z_{\max} = z_B$ et commenter son signe.



Document 13 : profondeur maximale atteinte z_{\max} en fonction de la hauteur de saut h , lorsque le modèle prend en compte les frottements de l'eau.

Docs. 12 et 13 d'après www.theses.fr/2014EPXX0055.

Pour la question suivante, on indique que le théorème de l'énergie mécanique s'écrit, lorsqu'il y a une force non conservative \vec{F} dont le travail est W : $\Delta E_m = W$. De plus, l'énergie potentielle $E_p(z)$ à prendre en compte ici est encore celle tracée sur le document 12.

51 - En exploitant notamment les documents 12 et 13, estimer la valeur de la force F pour un plongeon de hauteur initiale $h = 10$ m.
