Correction exercice 1

1.

$$[f] = [\eta][r][v] \Longrightarrow [\eta] = \frac{MLT^{-2}}{LLT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

2. On applique le théorème de l'énergie mécanique à la sphère dans un référentiel terrestre supposé galiléen (la sphère ne subit que la force de frottement fluide comme force non conservative) :

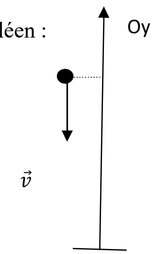
$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\vec{f}} = \vec{f}.\vec{v} = -6\pi\eta r\vec{v}.\vec{v} = -6\pi\eta r v^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} < 0$$

On en déduit que l'énergie mécanique diminue à cause des frottements.

Correction exercice 2

1. On applique le théorème de la puissance mécanique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :



$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\vec{f}} = \vec{f}.\vec{v} = -\beta\vec{v}.\vec{v} = -\beta v^2$$

Le poids est la force conservative subie par la particule donc la seule énergie potentielle à prendre en compte est l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = mgy$.

Soit :

$$\frac{1}{2}m\frac{d{v_y}^2}{dt} + mg\frac{dy}{dt} = -\beta v^2 \Leftrightarrow mv_y\frac{dv_y}{dt} + mgv_y = -\beta v_y^2 \Leftrightarrow m\frac{dv_y}{dt} + mg = -\beta v_y$$

Finalement :

$$v_y'(t) + \frac{\beta}{m}v_y(t) = -g$$

2. L'équation précédente s'écrit

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{v_y(t)}{\tau} = -g$$

Les termes dv_y/dt et $v_y(t)/\tau$ sont homogènes (ont la même dimension) donc τ est homogène à un temps, son unité (SI) est la seconde.

Pour une précision de 1% pour le capteur de vitesse, on considère que le régime transitoire présente une durée de 5τ.

La solution particulière est $v_y = -g\tau$ et la solution de l'équation sans second membre est $v_y(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ donc :

$$v_y(t) = -g\tau + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

On calcule A à partir de la vitesse initiale indiquée comme nulle par l'énoncé :

$$v_y(0) = 0 = -g\tau + A \Longrightarrow A = g\tau$$

$$v_y(t) = g\tau(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1)$$

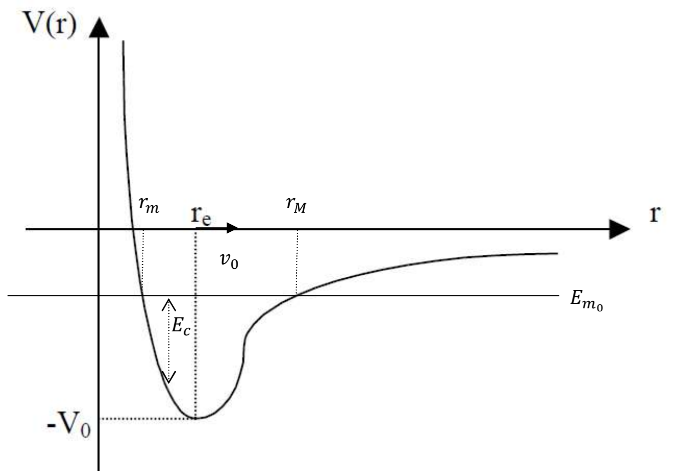
3. D'après le formulaire mathématique :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t)dt$$

$$y(t) = 0 + g\tau\int_0^t \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)dt = g\tau\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} - t\right]_0^t$$

$$y(t) = g\tau\left(-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} - t + \tau\right)$$

Correction exercice 2bis



1. Les zones énergétiquement accessibles au système sont déterminées par la relation :
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$$
Pour un système conservatif cette relation se traduit par :
$$E_{m_0} \geq E_p$$
Par lecture graphique la zone accessible est le segment $[r_m; r_M]$.

2. r_e est une position d'équilibre stable puisqu'il s'agit de l'abscisse d'un minimum de l'énergie potentielle du système.

3. Pour les conditions initiales $r(0) = r_e$ et $\dot{r}(0) = v_0 > 0$:

- le système se dirige vers la position r_M suivant un mouvement décéléré (l'énergie cinétique diminue, la vitesse diminue)
- en r_M, le système a une vitesse nulle. La position r_M n'est pas une position d'équilibre, le système est soumis à une force $F(r) = -\frac{dE_p}{dr} < 0$ (la pente $\frac{dE_p}{dr}$ est positive en r_M) et donc fait demi-tour
- de r_M à r_e le mouvement est accéléré
- en r_e, position d'équilibre, l'énergie cinétique est maximale,
- de r_m à r_e le mouvement du système est décéléré
- en r_m, le système a une vitesse nulle. La position r_m n'est pas une position d'équilibre, le système est soumis à une force $F(r) = -\frac{dE_p}{dr} > 0$ (la pente $\frac{dE_p}{dr}$ est négative en r_m) et donc fait demi-tour

On conclut que le système oscille entre les positions r_m et r_M.

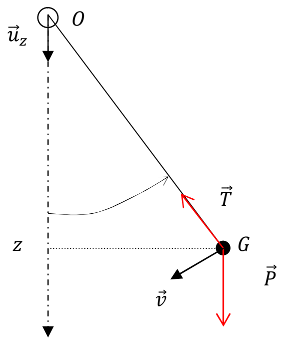
Notons qu'il ne s'agit pas d'un oscillateur harmonique dont l'énergie potentielle s'écrit dans le cas général :
$$E_p(r) = E_p(r_e) + \frac{1}{2}k(r - r_e)^2$$

En effet l'énergie potentielle proposée graphiquement dans cet exercice semble tendre vers zéro lorsque r tend vers plus l'infini. L'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique tend théoriquement vers plus l'infini.

Correction exercice 3

1. En modélisant le pendule par une masse ponctuelle m de vitesse $v = l\dot{\theta}$ on a :
$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

2. On modélise le pendule réel par un pendule simple composé d'une masse ponctuelle m de centre G tendant un fil de longueur $l = OG$ que nous avons représenté ci-dessous :



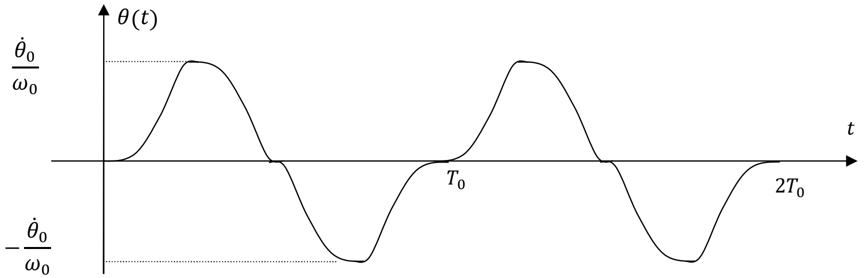
Le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ est une force conservative associée à l'énergie potentielle de pesanteur E_p par la relation :
$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad}\left(E_p(z)\right) \Leftrightarrow mg\vec{u}_z = -\frac{dE_p}{dz}\vec{u}_z \Leftrightarrow dE_p = -mgdz$$
Par intégration :
$$E_p(z) = -mgz + C \text{ avec } C \text{ une constante d'intégration}$$
Or :
$$\cos(\theta) = \frac{|z|}{l} = \frac{z}{l}$$
Donc :
$$E_p(\theta) = -mglcos(\theta) + C$$
Pour exprimer la constante A on utilise la condition $E_p(\theta = 0) = 0$ donc $C = mglcos(0) + E_p(\theta = 0) = mgl$.

Finalement : $\boxed{E_p(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta))}$.

3. Dans un référentiel galiléen la puissance mécanique dE_m/dt est égale à la somme des puissances des forces non conservatives noté $\sum P_{\vec{F}_{non\ conservatives}}$:
$$\frac{dE_m}{dt} = \sum P_{\vec{F}_{non\ conservatives}}$$
Rappel : D'une façon générale une puissance P est relié à l'énergie E associée par la relation :
$$P = \frac{dE}{dt}$$
Exemples :
La puissance cinétique P_c associé à l'énergie cinétique E_c s'écrit $P_c = \frac{dE_c}{dt}$
La puissance mécanique P_m associé à l'énergie mécanique E_m s'écrit $P_m = \frac{dE_m}{dt}$
La puissance $P_{\vec{F}}$ d'une force $\vec{F}$ associé au travail $W_{0\to t}^{\vec{F}} = \int_0^t \vec{F}.\vec{v}dt$(c'est une énergie) s'écrit $P_{\vec{F}} = \frac{dW^{\vec{F}}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

4. La masse m subit deux forces, son poids qui est une force conservative et $\vec{T}$ la tension du fil (supposé tendu) qui est une force non conservative. On applique le théorème de la puissance mécanique à la masse m dans un référentiel terrestre supposé galiléen :
$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\vec{T}} = \vec{T}.\vec{v} = 0$$
Remarque dans l'exercice (au programme) traitant du pendule simple on a vu que la tension du fil est perpendiculaire à la vitesse de la masse m tendant le fil donc que $\vec{T}.\vec{v} = 0$ *:*
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) + mgl\left(1 - \cos\left(\theta(t)\right)\right) = 0\right.$$
$$\frac{1}{2}ml^2 2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) + mgl\left(0 + \sin\left(\theta(t)\right)\dot{\theta}(t) = 0\right.$$
Remarque : la solution mathématique $\dot{\theta}(t) = 0$ *de l'équation précédente n'est pas physiquement intéressante car elle traduit l'équilibre du pendule.*
$$l\ddot{\theta}(t) + g\sin\left(\theta(t)\right) = 0$$
$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin\left(\theta(t)\right) = 0$$
Par identification :
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
Remarque on peut aussi raisonner ainsi : en l'absence de frottement l'énergie mécanique du système est constante donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$ *……*

5. Dans le cadre de l'approximation harmonique, l'équation précédente s'écrit $\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0$ de solution générale :
$$\theta(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t) \text{ donc } \dot{\theta}(t) = -\omega_0 Asin(\omega_0 t) + B\omega_0 cos(\omega_0 t)$$
On calcul A et B en utilisant les conditions initiales de l'énoncé :
$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\omega_0 = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$
$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t\right)$$
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

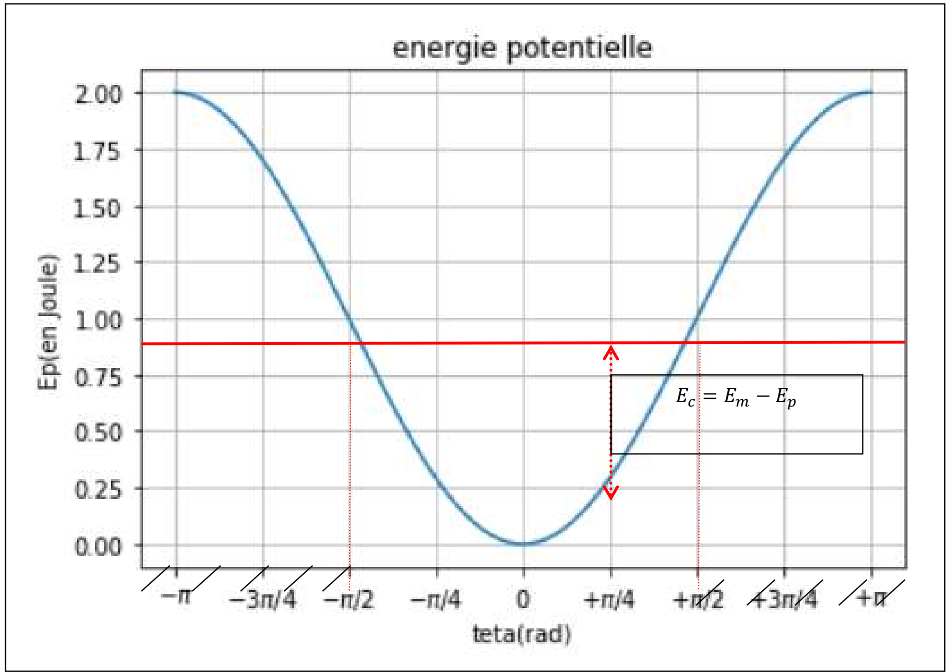


6. En l'absence de frottement, l'énergie mécanique se conserve (le système est conservatif) donc l'énergie mécanique est à tout instant égale à l'énergie mécanique initiale :

$$E_m = E_{m0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1-\cos(\theta(0)))$$

$$E_m = \frac{1}{2}0{,}2 * 10 + 0 = 1J$$

7. On utilise la représentation graphique de l'énergie potentielle en y ajoutant la courbe de l'énergie mécanique d'équation $E_m(\theta) = 1J$:



La zone accessible par l'oscillateur vérifie l'inéquation (traduisant que $E_c \geq 0$) :

$$E_m \geq E_p(\theta)$$

Par lecture graphique la solution de l'inéquation précédente est $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. La position angulaire maximale sera donc $\theta_{max} = \pi/2$. *Remarque la notation θ_0 pour désigne θ_{max} prête à confusion !*

ATS DM 1

8. On réalise une acquisition en un intervalle de temps T_e, il faut donc un temps $600\,000T_e$ pour réaliser 600 000 acquisitions (supposées périodiques !) :

$$600\,000T_e = 300s$$

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{600\,000}{300} = 2000Hz = 2kHz$$

9. Un analyseur de spectre généralement présent dans un oscilloscope (fonction Fast Fourier Transform)

10. *Il faut bien lire l'énoncé et surligner (ou souligner, encadrer) les relations et les hypothèses de l'énoncé par exemple la relation $u(t) = k\theta(t)$ qui traduit la mesure de l'angle $\theta(t)$ par la tension $u(t)$.*
L'énoncé précise que :
   - Si $\theta_0 < 30°C$ alors le pendule est isochrone (sa période T_0 ne dépend pas de son amplitude θ_0) et vérifie :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t) \text{ avec } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

   Ce signal présente une seule fréquence $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.

   - Si $\theta_0 > 30°C$ alors le pendule n'est pas isochrone et vérifie :

$$\theta(t) = \theta_0\left(\sin(\omega_0' t) + \frac{\theta_0^2}{192}\sin(3\omega_0' t)\right) \text{ avec } T_0' = T_0(1+\frac{\theta_0^2}{16})$$

Ce signal présente deux fréquences fréquence : $f_0' = \omega_0'/(2\pi)$ et $3f_0' = 3\omega_0'/(2\pi)$

L'isochronisme se traduit donc par l'observation d'un spectre de $\theta(t)$ présentant une seule fréquence. Or Le spectre de $u(t)$ est identique au spectre de $\theta(t)$ car on a $u(t) = k\theta(t)$ ou k est une constante.

On conclut que on observe l'isochronisme sur les intervalles 2 et 4 puisqu'ils montrent un spectre à une seule fréquence.

On remarque également que l'amplitude de l'oscillateur est doublée lorsqu'on passe de l'intervalle 2 à l'intervalle 4 alors que l'unique fréquence reste constante. Ceci atteste l'isochronisme de l'oscillateur puisque son unique fréquence f_0 est indépendante de son amplitude et donc que sa période T_0 est indépendante de son amplitude θ_0.

11. Les intervalles 1 et 3 présentent des spectres à deux fréquences, dont le rapport est $\frac{f_{max}}{f_{min}} = 3$ ce qui correspond au modèle décrit par l'énoncé pour un oscillateur non harmonique.

12. Par lecture graphique des spectres des intervalles 2 et 4 on a $f_0 = 1Hz$.

13. D'après le modèle de l'énoncé on doit observer :

$$f_{1b} = 3f_{1a} = 3 * 0{,}75Hz = 2{,}25Hz$$

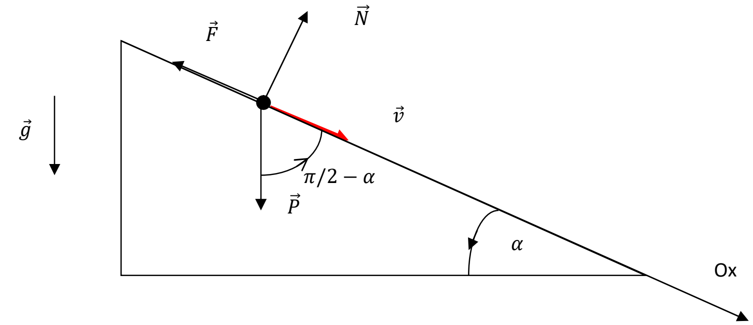
Effectivement on lit sur le spectre de l'intervalle 1 une raie à la fréquence $2{,}25Hz$ de faible amplitude par rapport à la raie de fréquence 0,75Hz.

On remarquera qu'on observe également, dans le spectre de l'intervalle 3, deux raies dont le rapport des fréquences ($\frac{f_{max}}{f_{min}}$) est bien de 3 comme prévu par la théorie de l'énoncé.

Mais la valeur de chaque fréquence a changée car l'amplitude a changée entre l'intervalle 1 et l'intervalle 3 (cf graphique) et comme la fréquence dépend de l'amplitude, pour un oscillateur non harmonique, il est normal d'observer un changement de valeur pour les fréquences.

Correction exercice 4

1. Faire un schéma de taille conséquente (1/3 page) pour une meilleur elisibilité.



2. **Première méthode** On applique le théorème de l'énergie cinétique à la masse m dans un référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = P_{\vec{P}}+P_{\vec{N}}+P_{\vec{F}} = \vec{P}.\vec{v}+\vec{N}.\vec{v}+\vec{F}.\vec{v} = mgcos(\frac{\pi}{2}-\alpha)v-\beta v^2$$

$$\frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt} = mgsin(\alpha v)-\beta v^2$$

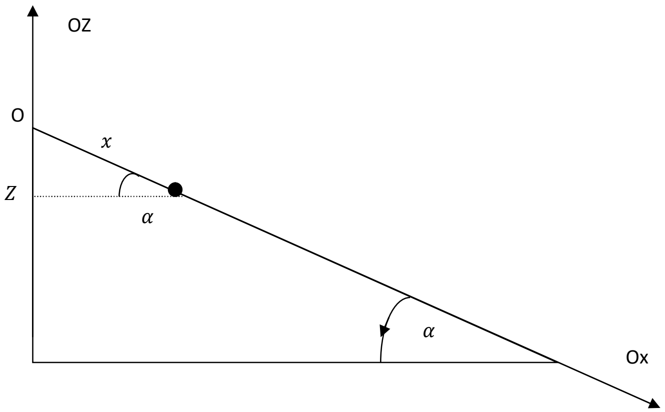
$$m\frac{dv}{dt}-mgsin(\alpha) = -\beta v$$

Cette méthode est très rapide lorsqu'on étudie un mouvement sur un plan incliné. Pour vous en persuader lire l'autre méthode qui utilise le théorème de l'énergie mécanique.

Seconde méthode moins pertinente ici (à vous de juger) On applique le théorème de l'énergie mécanique à la masse m dans un référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + E_p\right) = P_{\vec{N}} + P_{\vec{F}} = \vec{N}.\vec{v} + \vec{F}.\vec{v} = -\beta v^2$$

La variable pertinente de position de la masse m est son abscisse x comptée selon de la pente. Cependant l'énergie potentielle de pesanteur E_p dépend de la coordonnée verticale Z de la masse m. Il faut donc établir une relation entre Z et x en faisant attention aux signes des réels Z et x !



$$sin(\alpha) = \frac{l_{opposé}}{l_{hypothénus}} = \frac{|Z|}{x} = -\frac{Z}{x} \Longrightarrow Z = -xsin(\alpha)$$

$$E_p = mgZ = -mgxsin(\alpha)$$

Reprenons l'équation donnée par le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgxsin(\alpha)\right) = -\beta v^2$$

$$\frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt} - mgvsin(\alpha) = -\beta vv$$

$$m\frac{dv}{dt} - mgsin(\alpha) = -\beta v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m}v = gsin(\alpha)$$

3) Lorsque la mass m atteint sa vitesse limite la vitesse est constante et $\frac{dv}{dt} = 0$ donc :

$$0 + \frac{\beta}{m}v_{limite} = gsin(\alpha)$$

$$\boldsymbol{v_{limite} = \frac{mgsin(\alpha)}{\beta}}$$

Correction exercice 5 Une correction de l'AD

1. Une énergie potentielle est une énergie potentiellement récupérable. Pour être potentielle, l'énergie doit offrir la possibilité d'être stockée. L'énergie potentielle de pesanteur d'une masse d'eau retenue par un barrage est un exemple d'une telle énergie.

2. Une énergie renouvelable utilise une ressource naturelle (eau, rayonnement solaire, vent, les marées) non épuisable sur une grande échelle de temps.
Par opposition, les énergies fossiles utilisent également des ressources naturelles (charbon, pétrole) dont le stock est limité.
L'énergie hydraulique est la première source d'énergie renouvelable en France. L'énergie hydraulique ne s'accompagne d'aucun rejet de gaz à effet de serre ou de déchet nucléaire. Les installations (barrages, centrale hydroélectrique) peuvent avoir un impact sur le milieu naturel.

3. Quelle $E = 75TWh = 75.10^{12}.3600 = 27.10^{16}J$. On rappelle qu'une heure est égale à 3600 s.

4. Une retenue d'eau (barrage) présente une énergie potentielle (ment récupérable) de pesanteur $E_p = mgh$. La libération des vannes au niveau d'un barrage et la conduite forcée de l'eau permet de convertir l'énergie potentielle de pesanteur en énergie cinétique de translation $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. L'eau est ensuite dirigée vers les pales d'une turbine permettant de convertir l'énergie cinétique de translation en énergie cinétique de rotation. La turbine entraine en rotation un alternateur qui produit, par induction, un courant électrique alternatif. Un transformateur permet finalement d'alimenter les lignes à très haute tension pour le transport du courant électrique.

5. Les grandeurs pertinentes sont la hauteur $h(m)$ de chute de l'eau, le débit massique $D_m(kg.s^{-1})$de l'eau et l'intensité de pesanteur $g(m.s^{-2})$. On suppose pouvoir écrire :

$$P = KD_m^a h^b g^c$$

Où K est une grandeur sans dimension.

Par analyse dimensionnelle on obtient :

$$[P] = ML^2T^{-3}, \qquad [D_m] = MT^{-1}, \qquad [g] = LT^{-2}$$

On a alors :

$$ML^2T^{-3} = M^aT^{-a}L^bL^cT^{-2c} = M^aT^{-a-2c}L^{b+c}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -a - 2c = -3 \\ b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$P = D_m gh$$

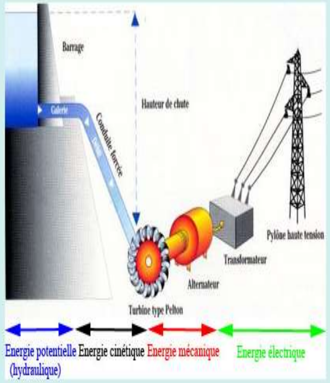
En écrivant $E = mgh$ et $P = \frac{dE}{dt}$ on obtient :

$$P = \frac{dm}{dt}gh = D_m gh$$

Principe de fonctionnement :

Il s'agit de capter la force motrice de l'eau pour produire de l'électricité.

L'eau accumulée dans les barrages ou dérivées par les prises d'eau, constitue une énergie potentielle disponible pour entraîner en rotation la turbine d'une génératrice. L'énergie hydraulique se transforme alors en énergie cinétique puis en énergie mécanique. Cette turbine accouplée mécaniquement à un alternateur l'entraîne en rotation afin de convertir l'énergie mécanique en énergie électrique.



La puissance disponible résulte de la conjonction de deux facteurs :

-hauteur de la chute
-débit de la chute

ATS DM 1