CONCOURS
CPGE
EPITA - IPSA - ESME

1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS
POUR VOUS PRÉPARER
À UNE MULTITUDE
DE MÉTIERS

Samedi 17 Avril 2021

OPTION : PHYSIQUE

MP / PC / PSI / PT / TSI

Durée : 2 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME 2021

Option Physique

Le condensateur pour stocker de l'énergie

- Calculatrices interdites
- Les différentes parties sont indépendantes. Elles comptent environ et respectivement pour 20%, 10%, 60% et 10% du barème.

Introduction

Le condensateur est une brique de base des circuits électroniques de commande ou de puissance. Après avoir rappelé le principe de fonctionnement de ce composant (partie I), nous nous focaliserons sur les condensateurs utilisés comme dispositifs de stockage de l'énergie, à l'instar des batteries (partie II). Se pose alors la question de leur recharge (partie III), et de la récupération d'énergie cinétique pour les charger (partie IV).

I Principe de fonctionnement du condensateur

Cette partie s'intéresse au principe de fonctionnement du condensateur, à travers les modèles électrostatique et électrocinétique usuels.

Remarque : Il est conseillé de lire cette partie, car elle redonne les principales relations concernant ce composant.

I.1 Modèle électrostatique

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}} \simeq 10^{-11}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$.

1 - Préliminaire : on considère un plan infini chargé avec une densité surfacique de charge σ uniforme. On note Oz l'axe orthogonal au plan, tel que l'équation du plan est $z = 0$. On note $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ la base orthonormée usuelle, et O le centre du repère.

Démontrer soigneusement que le champ électrique créé par cette distribution est donné par :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \quad \text{pour} \quad z > 0, \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \quad \text{pour} \quad z < 0. \tag{1}$$

On modélise maintenant un **condensateur** par deux plans parallèles, chacun de surface S. On note Oz l'axe orthogonal aux deux plans. Le plan supérieur, situé en $z = e$ (e distance positive), porte une densité surfacique de charge $\sigma > 0$, et le plan inférieur (en $z = 0$) une densité opposée. On note U la différence de potentiel entre le plan supérieur et le plan inférieur : $U = V(e) - V(0)$ avec V le potentiel électrostatique. On néglige tout effet de bord.

2 - Déterminer l'expression du champ électrique en tout point de l'espace.

3 - Déterminer l'expression de la différence de potentiel U en fonction de σ, e et ε_0.

Puis déterminer l'expression de la capacité C du condensateur, définie par la relation $Q = CU$ où Q est la charge portée par l'armature positive, en fonction de S, e et ε_0.

Faire l'application numérique pour une surface $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ et une séparation $e = 0{,}1\,\mathrm{mm}$.

4 - On rappelle que la densité volumique d'énergie du champ électrique est $u_E = \varepsilon_0 E^2/2$.

En déduire que l'expression de l'énergie stockée par le condensateur est $\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}CU^2$.

On admettra que toutes ces expressions, ici démontrées dans le cadre de l'électrostatique (grandeurs indépendantes du temps), restent valables dans le cadre des régimes lentement variables de l'ARQS (approximation des régimes quasi-stationnaires), cadre qui est celui utilisé dans tout ce sujet.

I.2 Modèle électrocinétique

On considère maintenant un condensateur comme un composant électronique.
On utilise la convention récepteur.

5 - En partant de la relation $Q = CU$, démontrer la relation usuelle entre tension et intensité pour un condensateur.

6 - En exploitant la question précédente, démontrer à nouveau l'expression $\mathcal{E}_{\text{stockée}} = \dfrac{1}{2}CU^2$ de l'énergie stockée par le condensateur.

II Un exemple d'utilisation des condensateurs : les supercondensateurs

On donne : $4 \times 3{,}6/3 = 4{,}8$; $4/(3 \times 3{,}6) = 0{,}37$; $3/(4 \times 3{,}6) = 0{,}21$; $200/7{,}5^2 = 3{,}6$; $7{,}5^2/200 = 0{,}28$.

Un “supercondensateur” est un condensateur de technique particulière, qui permet d'obtenir une capacité élevée pour un encombrement réduit, et donc une densité de puissance et une densité d'énergie intermédiaires entre les batteries et les condensateurs électrolytiques classiques. Ils sont utilisés dans des domaines variés, dont la propulsion de bateaux, de bus ou de tramway. Leur faible résistance interne permet des courants élevés et donc des charges rapides et des puissances de sortie importantes.

Nous étudions ici un exemple d'application des supercondensateurs, et en particulier nous voyons ce qui contraint leur dimensionnement (quelle capacité, quelle résistance interne ?).

Supercondensateurs.

Tramway de la ligne T3, ici sur une section avec ligne aérienne de contact.

> **Document :** En 2009, la RATP et Alstom ont expérimenté en service commercial un tramway Citadis équipé de supercondensateurs sur la ligne T3 du réseau francilien. La rame a été équipée de 48 modules de supercondensateurs (15 kg pièce) pour le stockage de l'énergie à bord. L'ensemble est équivalent à 48 supercondensateurs montés en dérivation sous une tension de 750 V. Ceci permet aux trams de circuler en autonomie sur les sections dépourvues de ligne aérienne de contact. En autonomie la rame peut franchir 400 m, soit la distance entre deux stations sur la ligne T3, avec une vitesse moyenne d'environ 15 km/h.
> Les moteurs développent une puissance moyenne continue de 500 kW, et sont alimentés sous 750 V.
> Présentant une résistance interne très faible, les supercondensateurs autorisent le passage d'intensités très importantes pendant les 20 secondes que dure un rechargement en station, et sont donc en cela plus adaptés que les batteries conventionnelles.
> Source images : Wikipedia, et texte :
> https://www.ville-rail-transports.com/ferroviaire/alstom-et-la-ratp-testent-les-supercondensateurs-2/

À l'aide des données du document ci-dessus et des approximations nécessaires, en déduire les valeurs :

7 - de l'énergie $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ nécessaire au trajet entre deux stations,

8 - de la capacité d'un des 48 supercondensateurs (commenter la valeur trouvée),

9 - de la résistance du circuit de charge.

III Stratégies de charge d'un condensateur

Remarque : les sous-parties III.1, III.2 et III.3 sont liées ; la partie III.4 est indépendante.

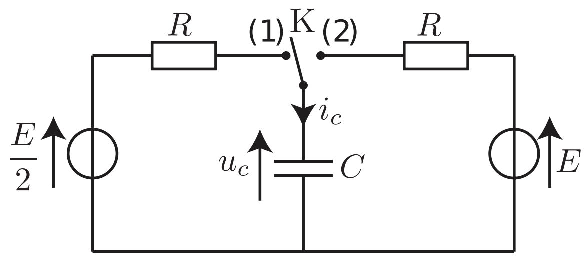
Lorsqu'un condensateur est utilisé comme une batterie, la question de sa recharge se pose. L'énergie est prélevée sur le réseau électrique, et on souhaiterait que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur. Nous allons montrer que ceci dépend de la statégie de charge retenue.

On appelle "**rendement de la charge** du condensateur" le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge et de l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}}. \tag{2}$$

10 - De manière générale, la charge se fait à travers la résistance totale du circuit R. On note C la capacité du condensateur et E la tension finale à atteindre aux bornes du condensateur. Montrer par des arguments dimensionnels que l'expression du rendement η ne peut pas dépendre des valeurs de R, C ou E.

Dans les sous-parties III.1 et III.2 on raisonne sur le circuit ci-contre pour envisager deux méthodes de recharge, qui vont mener à deux valeurs de rendement différentes.



III.1 Premier procédé de charge

L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact.

Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l'interrupteur K dans la position (2) à $t = 0$.

11 - Établir l'équation différentielle portant sur $u_c(t)$.

On la mettra sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$ avec τ un paramètre dont on précisera l'expression.

12 - Déterminer sans utiliser l'équation différentielle la valeur de $u_c(0^+)$ (juste après le basculement de l'interrupteur).

13 - Résoudre l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

14 - Tracer l'allure de la solution $u_c(t)$.

15 - Donner en fonction de C et de E l'expression de l'énergie stockée par le condensateur à la fin de sa charge.

16 - Démontrer que le courant i_c s'écrit, pour tout $t \geq 0$: $i_c(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

17 - Calculer alors l'énergie électrique fournie par le générateur sur l'ensemble de la charge.

18 - Quelle est la valeur du rendement de la charge (défini par l'expression (2)) avec la méthode envisagée ? Peut-il être optimisé en changeant la résistance R ?

III.2 Second procédé de charge

On souhaite utiliser une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la charge. On réalise une charge en deux temps. Le condensateur est initialement déchargé. L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Puis il est fermé en position (1) à $t = 0$. Lorsque le régime transitoire qui s'ensuit est achevé, l'interrupteur est basculé en position (2).

19 - Déterminer l'expression de $u_c(t)$ pendant la première phase de la charge.

20 - Déterminer en fonction de R et de C l'expression de l'instant t_1 pour lequel la tension u_c aux bornes du condensateur atteint 99% de sa valeur finale au cours de cette première étape.

Dans la suite, on considérera que la charge est totalement achevée à cet instant t_1 (donc $u_c(t_1) \simeq E/2$), et qu'on passe en phase 2 (basculement de l'interrupteur en position (2)).

21 - Exprimer la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge, qui commence à l'instant t_1.

22 - Tracer l'allure de $u_c(t)$ en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.

23 - Exprimer l'intensité i_c qui traverse le condensateur pendant les deux phases de charge. On distinguera les cas en fonction de t.

24 - Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pendant la charge. On utilisera $\mathrm{e}^{-5} \simeq 0$.

25 - En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure quant aux avantages et désavantages par rapport à la première méthode.

III.3 Généralisation à une charge en N étapes

La section III.2 montre que la charge fractionnée en deux étapes permet un meilleur rendement. Nous établissons ici l'expression du rendement pour un fractionnement en N étapes. Notons $t_0 = 0$ l'instant initial où le condensateur est déchargé. La première étape a lieu de t_0 à $t_1 = 5\tau$, par un générateur de tension E/N, à travers une résistance R.

De manière générale, l'étape numéro k de la charge ($k = 1$ à N) a lieu de t_{k-1} à t_k, par un générateur de tension kE/N, à travers une résistance R.
On a $t_k = k \times 5\tau$.
Au début de l'étape k, $u_c(t_{k-1}) = (k-1)E/N$, et à la fin de l'étape k, $u_c(t_k) = kE/N$.

Lors de l'étape k de la charge, déterminer (notamment en fonction de k et de N) :

26 - l'équation différentielle suivie par la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur, puis l'expression de sa solution $u_c(t)$,

27 - l'expression de l'intensité $i_c(t)$ traversant le condensateur,

28 - l'expression de l'énergie fournie par le générateur (on utilisera $\mathrm{e}^{-5} \simeq 0$).

En déduire ensuite :

29 - l'expression de l'énergie fournie par le générateur lors de l'ensemble de la charge,

30 - puis montrer enfin que le rendement de la charge en N étapes s'écrit $\eta = \dfrac{N}{N+1}$.

III.4 Point de vue thermodynamique

La partie III.3 montre que le rendement de la charge peut tendre vers 1 si on multiplie les étapes. D'un point de vue thermodynamique, ceci devrait se traduire par une charge réversible, ce que nous allons prouver ici. Cette sous-partie ne nécessite pas d'avoir traiter les autres pour y répondre.

On considère une résistance R parcourue par un courant constant I. Le régime est stationnaire. On s'intéresse uniquement aux irréversibilités liées à l'effet Joule, et en particulier la température et la pression du matériau qui constitue la résistance sont uniformes, constantes, égales respectivement à la température T_0 et à la pression p_0 du milieu extérieur.

31 - Déterminer l'expression du transfert thermique Q reçu par la résistance pendant une durée Δt, de la part du milieu extérieur, en fonction de R, I et Δt. Commenter son signe.

32 - Déterminer l'expression de l'entropie créée pendant une durée Δt, en fonction de T_0, R, I et Δt. Commenter son signe.

33 - En déduire une relation générale entre l'énergie $\mathcal{E}_{\text{diss}}$ dissipée par effet Joule dans la résistance (énergie dégradée ou gâchée), l'entropie créée et la température T_0 du milieu extérieur.

Retournons à la charge du condensateur. Nous avons montré que pour une charge en N étapes à travers une résistance R, jusqu'à une tension finale E, le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge ($\mathcal{E}_{\text{stockée}} = CE^2/2$) et de l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge s'écrit :

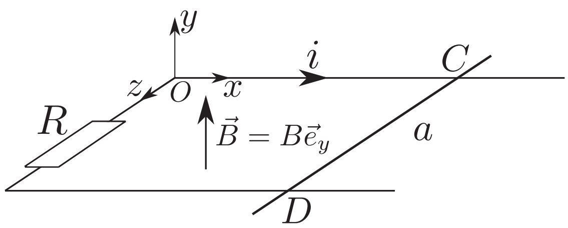
$$\frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{N}{N+1}. \tag{3}$$

34 - En déduire l'expression de l'entropie créée lors de la charge en fonction de N, E et C. Peut-on tendre vers la réversibilité en multipliant les étapes ?

IV Principe de la recharge par induction

Le tramway T3 évoqué dans la partie II peut recharger ses supercondensateurs en convertissant, lors des freinages, son énergie cinétique en énergie électrique. Le principe utilisé est celui de l'induction. Le dispositif est généralement une génératrice en rotation, mais nous l'illustrons ici simplement sur le dispositif linéaire des rails de Laplace.

On considère le dispositif des rails de Laplace schématisé ci-contre. La longueur de la tige mobile entre les deux points de contact C et D est notée a, sa masse m, et elle peut glisser sans frottement sur les rails.



On note $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ la base orthonormée usuelle. Le champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{e}_y$ est constant et uniforme à travers le circuit. La pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_y$.

La tige est initialement à l'abscisse $x = 0$, et elle est lancée avec une vitesse initiale v_0 vers les x positifs.

La résistance R représente un dipôle résistif à alimenter. On néglige toute autre résistance, ainsi que les phénomènes d'autoinduction.

35 - Donner l'expression de la résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur la tige, $\vec{F}_L = i\,\overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}$, en fonction de a, B, i et d'un vecteur unitaire de la base.

36 - Montrer que le courant induit i s'écrit $i = aBv/R$, avec v la composante de la vitesse de la tige selon $\vec{e}_x$.

37 - Établir une expression de $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ en fonction de a, B et i.

38 - En déduire une expression de $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$, où E_c est l'énergie cinétique de la tige, en fonction de R et i uniquement.

Conclure sur le rendement de la conversion d'énergie cinétique en énergie électrique reçue par le dipôle R.

39 - Un tramway Citadis a une masse d'environ 50 tonnes. Quelle est la valeur de son énergie cinétique s'il roule à $36\,\mathrm{km/h}$?

L'énergie stockée dans les supercondensateurs de cette rame est de l'ordre de 50×10^6 J. Quel pourcentage la récupération d'énergie par induction permet-elle de recharger ?