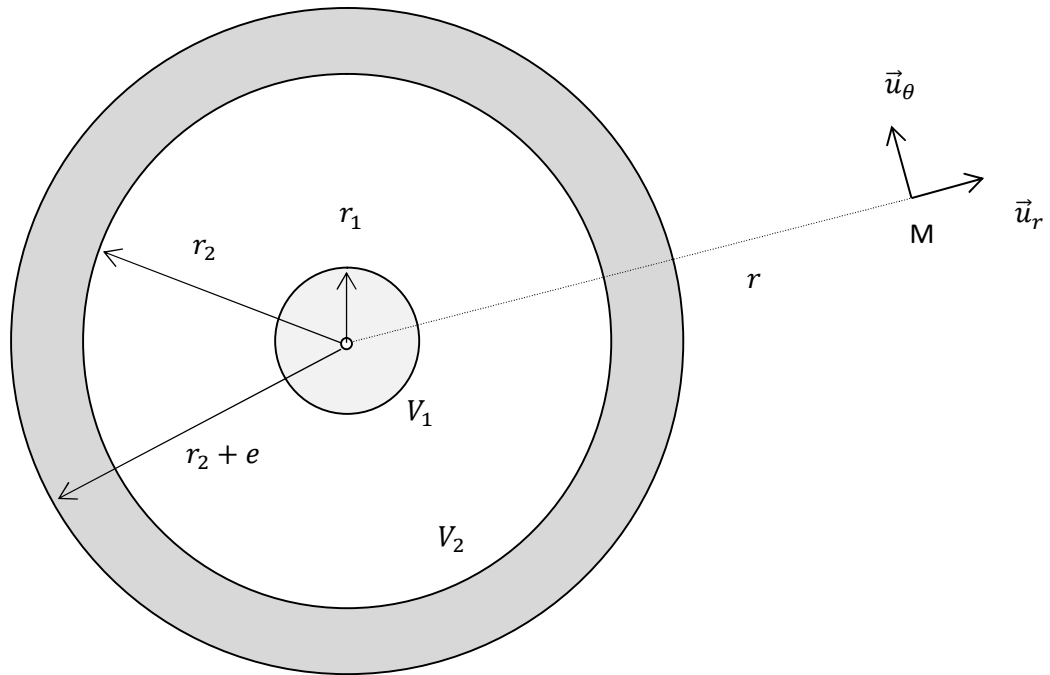


Correction premier problème



1.1 La distribution de charge est invariante par rotation par rapport à Oz et translation selon oz ((1) : distribution uniforme de charge sur deux cylindres infinis d'axe Oz) : $\vec{E}(M)$ est indépendant de θ et z .

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge ((1)) : $\vec{E}(M)$ est radial :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$$

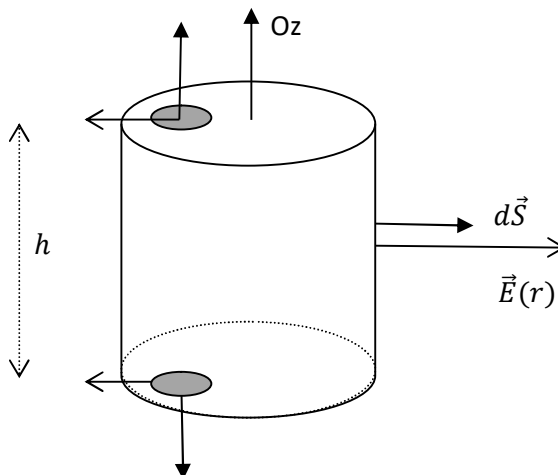
L'énoncé ne précise pas de notation pour les densités surfaciques de charge. L'énoncé indique que la charge Q est répartie uniformément sur la surface du cylindre de rayon r_1 et que la charge $-Q$ est répartie sur la surface cylindrique (en regard de la surface du cylindre de rayon r_1) de rayon r_2 , je pose :

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi r_1 l} \text{ et } \sigma_2 = \frac{-Q}{2\pi r_2 l}$$

1.2.a et 1.2.b On applique le théorème de Gauss sur un cylindre d'axe Oz, fermé par deux disques, de hauteur h et de rayon r :

$$\oiint_{M \in S=C \cup \text{Disques}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon}$$

Calcul du flux



$$\oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Cylindre}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Disques}} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r)$$

Calcul de la charge intérieure à la surface fermée et du champ $E(r)$:

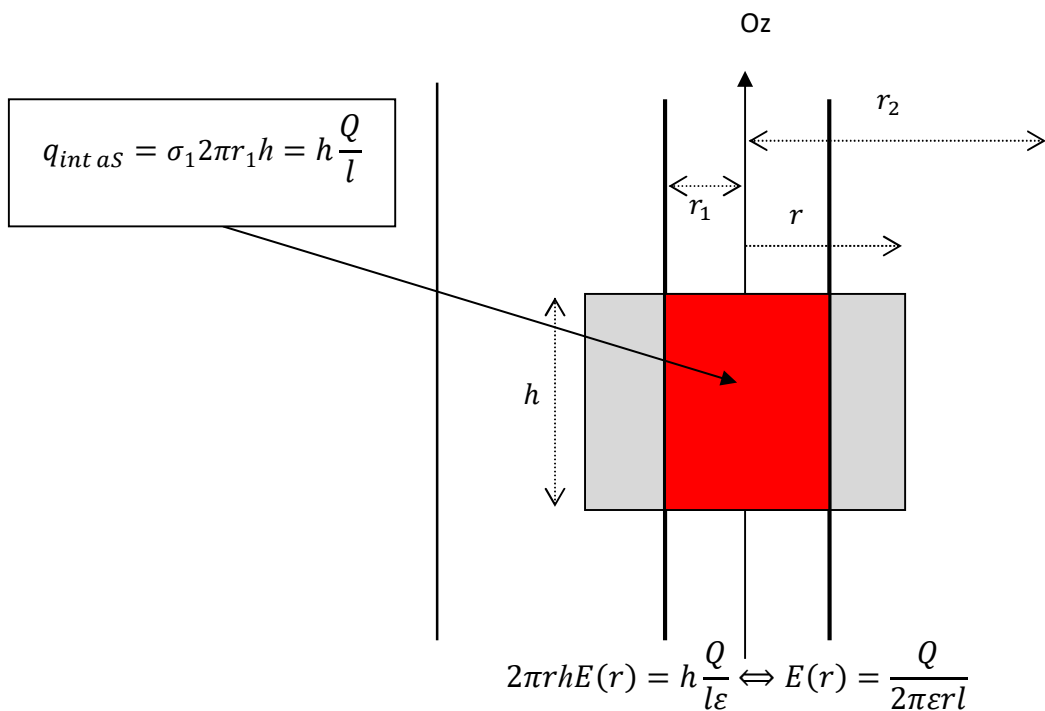
Pour $r < r_1$ $q_{int as} = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$.

Pour $r > r_2$ par influence totale des armatures $q_{int as} = \sigma_1 2\pi r_1 h + \sigma_2 2\pi r_2 h = h(Q/l - Q/l) = 0$

$$\vec{E}(M) = \vec{0}$$

Pour $r_1 < r < r_2$

$$q_{int as} = \sigma_1 2\pi r_1 h = h \frac{Q}{l}$$

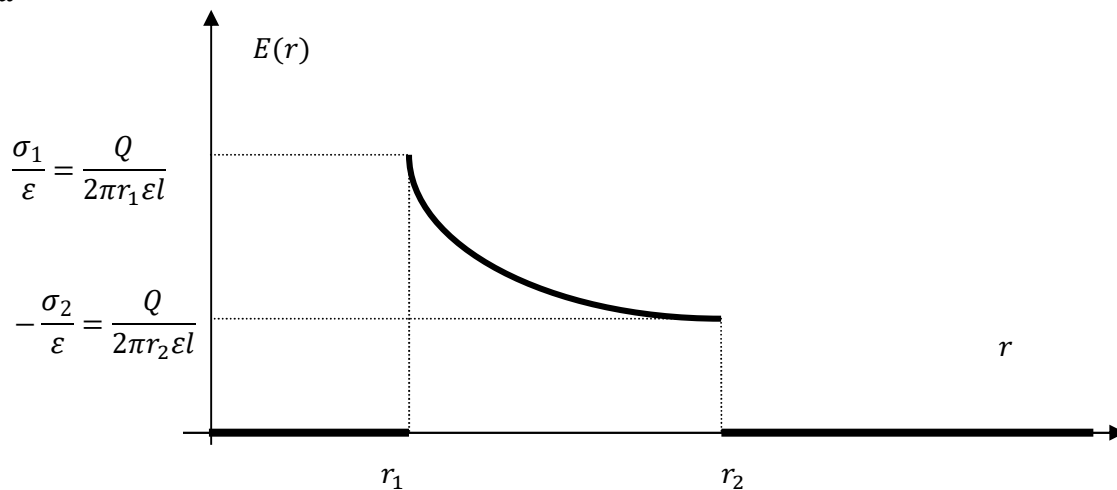


$E(r)$ s'écrit également

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} = \frac{\sigma_1 r_1}{r \epsilon}$$

Pour 1.2.b : le cas $r > r_2$ comprend les cas $r_2 < r < r_2 + e$ et $r > r_2 + e$

1.3.a



Les discontinuités de $E(r)$ proviennent de la modélisation surfacique des charges sur les armatures, cette modélisation induit une discontinuité dans la répartition de la matière.

En réalité les charges sont réparties en volume sur une faible épaisseur et le champ électrostatique est continue si l'on tient compte d'une distribution volumique des charges

1.4 On utilise la relation :

$$V_1 - V_2 = \int_{1 \rightarrow 2} \vec{E}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{OM} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

On utilise $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$ qui doit être donné dans l'énoncé !

1.5 Par définition de la capacité C du condensateur s'écrit ($Q_1 = Q$) :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

La capacité par unité de longueur C_1 est alors donnée par :

$$C_1 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

1.6 L'énergie (potentielle) électrostatique W_e s'écrit :

$$W_e = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} U_{12}^2$$

1.7 Avec calculatrice :

$$C_1 = \frac{2\pi \cdot 2.885 \cdot 10^{-12}}{\ln(50/15)} = 92 \text{ pF}$$

1.8 Avec calculatrice :

$$W_e = \frac{1}{2} C U_{12}^2 = \frac{1}{2} (92 \cdot 10^{-12}) 1010^2 = 46 \text{ nJ}$$

2 L'énoncé précise que les courants sont volumiques donc il n'y aura pas de discontinuité du champ magnétostatique.

Précisons plus avant les expressions des densités volumiques de courant supposées uniformes d'après l'énoncé.

On utilise pour cela la relation liant l'intensité d'un courant et sa densité volumique :

$$I = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{M \in S} j(M) \cdot dS$$

Pour une densité uniforme :

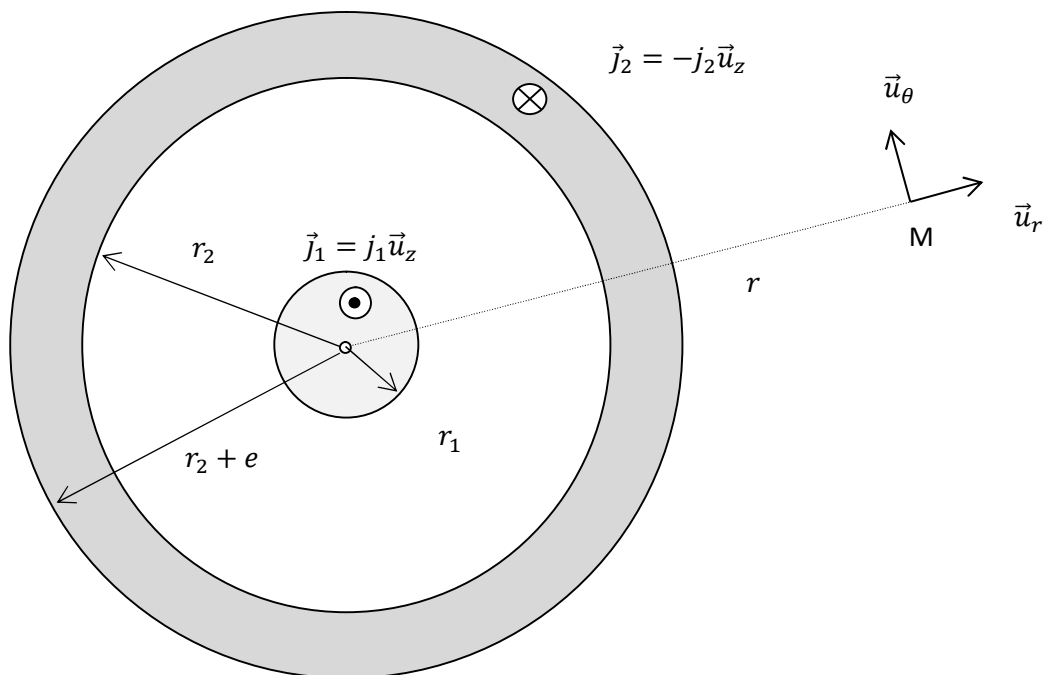
$$I = jS \Leftrightarrow j = \frac{I}{S}$$

Le conducteur intérieur (cylindre conducteur plein de rayon r_1) est parcouru par un courant (volumique !) d'intensité I et densité volumique de courant :

$$\vec{j}_1 = \frac{I}{\pi r_1^2} \vec{u}_z$$

Le conducteur extérieur (délimité par les cylindres coaxiaux de rayons r_2 et $r_2 + e$) est parcouru par un courant d'intensité $-I$ et de densité volumique de courant :

$$\vec{j}_2 = \frac{-I}{\pi(r_2 + e)^2 - \pi r_2^2} \vec{u}_z$$



2.1 La distribution de courant uniforme est invariante par translation selon Oz et par rotation par rapport à Oz donc B ne dépend pas de z et θ . Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant donc :

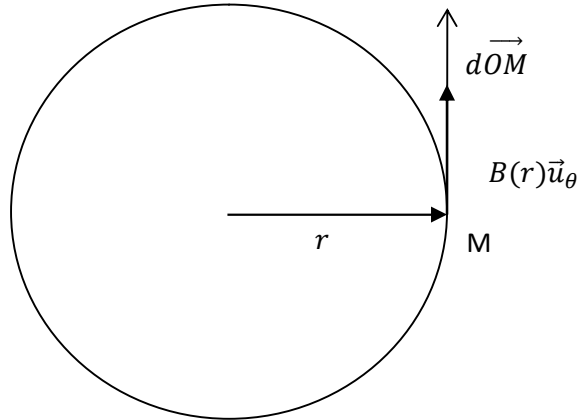
$$B(M) = B(r) \vec{u}_\theta$$

2.2 On applique le théorème d'Ampère sur un cercle Γ d'axe Oz et de rayon r :

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \mu_0 \sum i_{\text{enlacé par } \Gamma}$$

Calcul de $\oint_{M \in \Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM}$

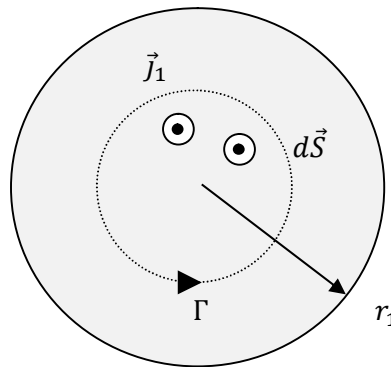
$$\vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = B(r)B(r)\vec{u}_\theta \cdot (dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z) = B(r)rd\theta$$



$$\oint_{M \in \square} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_0^{2\pi} B(r)rd\theta = 2\pi r B(r)$$

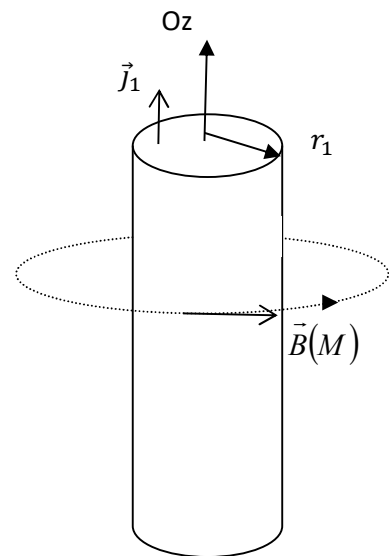
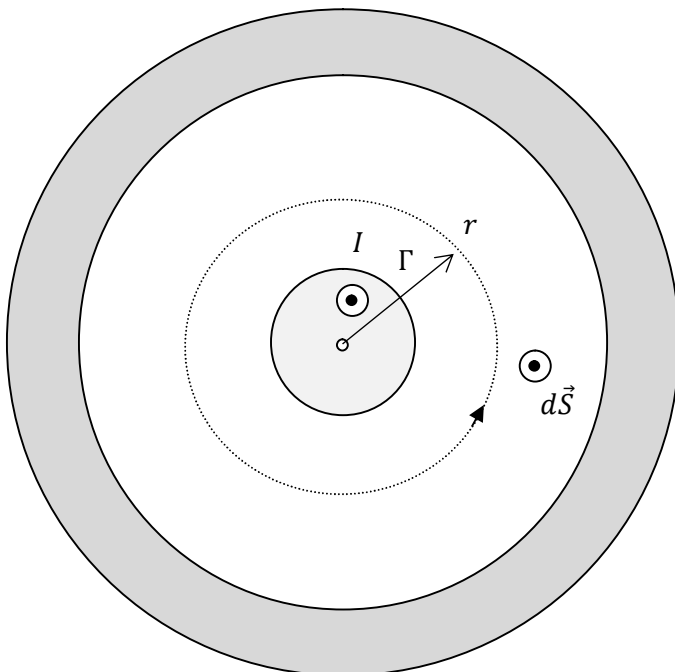
Calcul de $\sum i_{enlacépar\Gamma}$ et de $B(r)$

$r < r_1$:



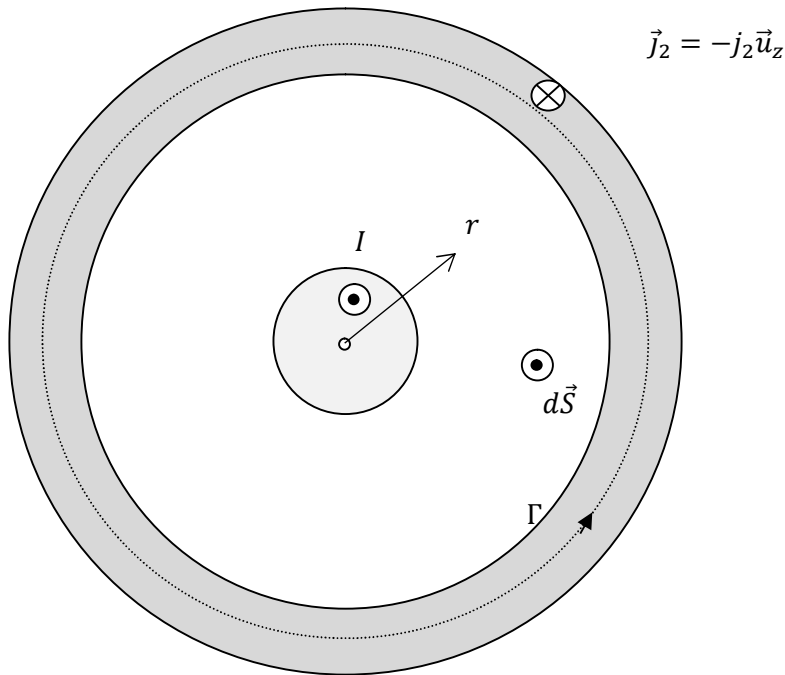
$$\sum i_{enlacépar\Gamma} = \iint j_1 dS = j_1 \pi r^2; \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_1 \pi r^2}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 j_1 r}{2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1 r_1} \vec{u}_\theta$$

$r_1 < r < r_2$:



$$\sum i_{enlacépar\Gamma} = I; \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

$r_2 < r < r_2 + e$:



$$\sum i_{enlacépar\Gamma} = +I + \iint \vec{j}_2 d\vec{S} = I - j_2(\pi r^2 - \pi r_2^2)$$

$$\sum i_{enlacépar\Gamma} = I \left(1 - \frac{\pi r^2 - \pi r_2^2}{\pi (r_2 + e)^2 - \pi r_2^2} \right) = I(r)$$

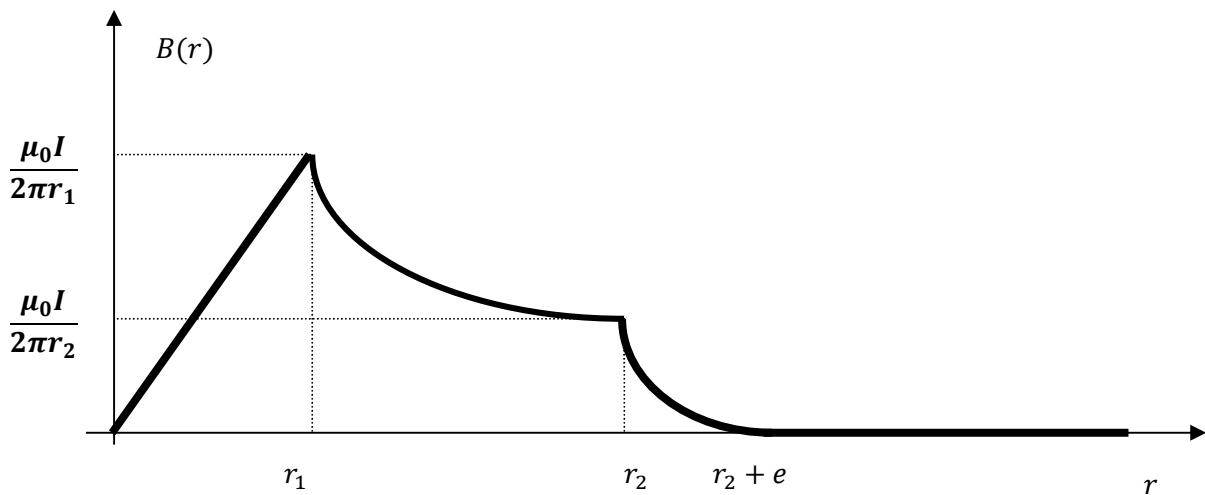
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Remarque : pour $r = r_2^+$: $I(r) = I$ et $\vec{B}(r_2^+) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \vec{u}_\theta = \vec{B}(r_2^-)$: le champ $B(r)$ est continu en r_2

$r > r_2 + e$

$$\sum i_{enlacépar\Gamma} = +I - I = 0 : \vec{B}(M) = \vec{0}$$

2.3



Il n'y a pas de discontinuité du champ B. C'était prévisible car les courants sont volumiques ! Plus précisément les courants n'ont pas été modélisés par des distributions surfaciques de courant.

2.4 La densité volumique u_B d'énergie magnétique s'écrit :

$$u_B(M) = \frac{B^2(M)}{2\mu_0}$$

En négligeant l'énergie magnétique localisée dans les conducteurs (régions : $0 < r < r_1$ et $r < r_2 < r_2 + e$) :

$$W_m = \iiint_{\substack{r_1 < r < r_2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq l}} u_B(M) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\substack{r_1 < r < r_2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq l}} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r dr d\theta dz = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) l 2\pi = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) l$$

2.5 En égalisant l'expression précédente avec l'expression $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ (obtenue par un bilan d'énergie sur le dipôle inductance) on obtient :

$$\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) l$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) l$$

$$L_1 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

2.6 On a :

$$L_1 = 2 \cdot 10^{-7} \ln \left(\frac{50}{15} \right) = 0,24 \mu H$$

2.7 On a :

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L_1 l I^2 = \frac{1}{2} 0,24 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot (0,1)^2 = 0,12 \cdot 10^{-7} J = 12 nJ$$

3.1 On utilise la formule de la résistance d'un conducteur de section constante S et de longueur l : $R = l/(\gamma S)$.

- Résistance du conducteur intérieur :

$$R_1 = \frac{l}{\gamma \pi r_1^2}$$

- Résistance du conducteur extérieur :

$$R_2 = \frac{l}{\gamma (\pi (r_2 + e)^2 - \pi r_2^2)}$$

Les deux conducteurs sont en série :

$$R = R_1 + R_2 = l \left(\frac{1}{\gamma \pi r_1^2} + \frac{1}{\gamma (\pi (r_2 + e)^2 - \pi r_2^2)} \right)$$

$$R_l = \frac{R}{l} = \frac{1}{\gamma \pi r_1^2} + \frac{1}{\gamma (\pi (r_2 + e)^2 - \pi r_2^2)} = \frac{1}{\gamma \pi} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{(r_2 + e)^2 - \pi r_2^2} \right)$$

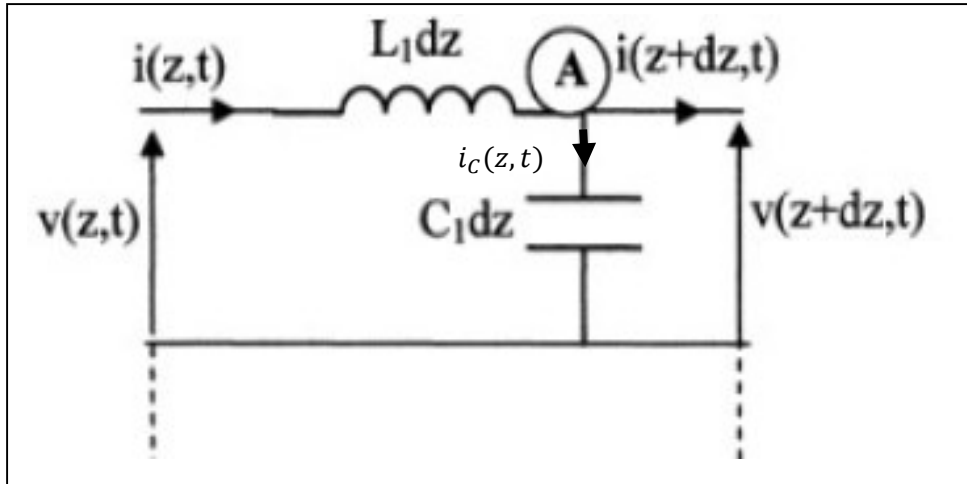
3.2 On a :

$$R_l = \frac{1}{\pi \cdot 5,8 \cdot 10^7} \left(\frac{1}{(0,15 \cdot 10^{-2})^2} - \frac{1}{(0,60 \cdot 10^{-2})^2 - (0,50 \cdot 10^{-2})^2} \right) = \frac{10^{-7+4}}{18,22} (44,44 - 1,22) = 2,37 m\Omega \cdot m^{-1}$$

3.3 Loi des mailles : $E_G = (R + R_u)I = (2,37 \cdot 10^{-3} \cdot 10 + 50)0,1 \approx 5V$

B1.1 Loi des nœuds au point A :

$$i(z, t) = i(z + dz, t) + i_c(z, t)$$



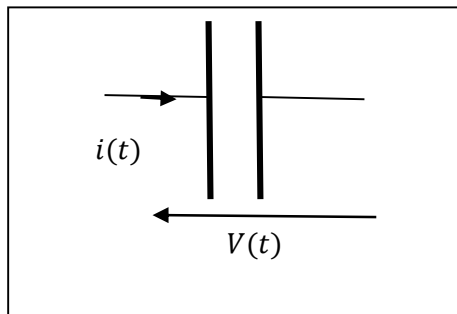
$$i(z, t) = i(z + dz, t) + C_1 dz \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$-C_1 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} = \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{z + dz - z} = \frac{\partial i}{\partial z}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C_1 \frac{\partial V}{\partial t}$$

Rappel : aux bornes d'un condensateur en convention receveur :

$$q = CV \text{ et } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$



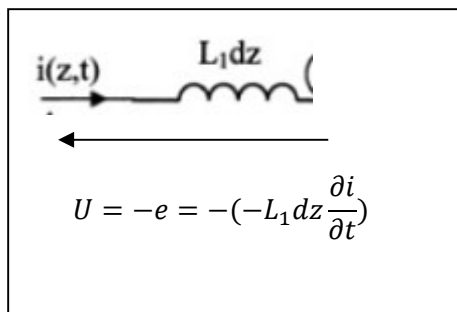
B1.2 Loi des mailles :

$$-V(z, t) - \left(-L_1 dz \frac{\partial i}{\partial t}\right) + V(z + dz, t) = 0$$

$$\frac{V(z + dz, t) - V(z, t)}{z + dz - z} = -L_1 \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L_1 \frac{\partial i}{\partial t}$$

Rappel



B1.3 Pour obtenir l'équation de d'Alembert vérifiée par $V(z, t)$ on forme les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \right) = -L_1 \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-C_1 \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

On admet $\left(\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \right)$:

$$-\frac{1}{L_1} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Par identification avec l'équation donnée par l'énoncé, on pose :

$$L_1 C_1 = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Ces équations s'interprètent comme les équations de propagation d'une onde électrique se propageant dans le câble coaxial à la célérité c :

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

B.1.4 Or :

$$L_1 C_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \frac{2\pi \varepsilon}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} = \mu_0 \varepsilon = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_r}{c_{vide}^2}$$

Donc :

$$c = \frac{c_{vide}}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

B.1.5 Application numérique :

$$c = \frac{3.10^8}{\sqrt{2}} = 2,1.10^8 m.s^{-1}$$

B.1.6 La solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension (z) en tension s'écrit :

$$V(z, t) = V_a \left(t - \frac{z}{c} \right) + V_b \left(t + \frac{z}{c} \right)$$

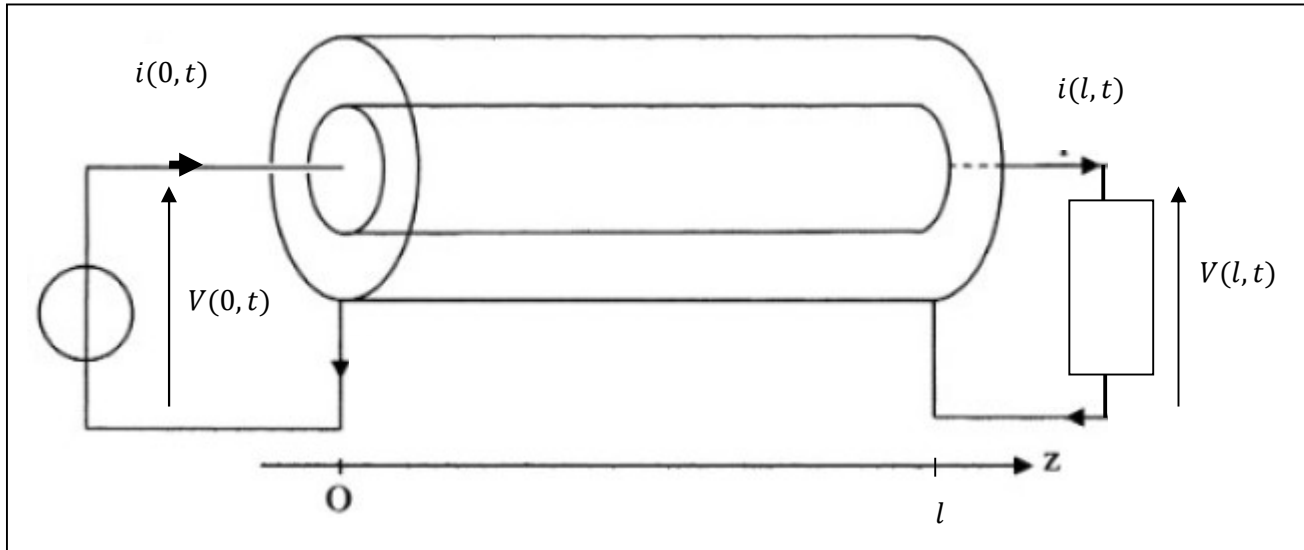
V_a décrit une onde plane (les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à Oz) progressive (onde se propageant sans se déformer) se propageant dans le sens positif de l'axe Oz . V_b décrit une onde plane progressive se propageant dans le sens négatif de Oz . V_b résulte de la réflexion de l'onde incidente V_a sur l'impédance de bout de ligne.

Correction deuxième problème partie III

La partie III.A se corrige comme pour la partie B du premier problème :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Partie B



B.28) On applique la loi d'Ohm :

$$\underline{V}(l, t) = R \underline{i}(l, t) = 0$$

La solution générale de l'équation de propagation donnée par l'énoncé s'écrit :

$$\underline{V}(z, t) = \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} + \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + k z)}$$

Les deux équations demandées s'obtiennent à partir des conditions aux limites pour la tension :

$$\begin{cases} \underline{V}(0, t) = V_0 e^{j\omega t} \\ \underline{V}(l, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - k \cdot 0)} + \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + k \cdot 0)} = V_0 e^{j\omega t} \\ \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kl)} + \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + k l)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{im} + \underline{V}_{rm} = V_0 \\ \underline{V}_{im} e^{-jkl} + \underline{V}_{rm} e^{jkl} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{rm} = V_0 - \underline{V}_{im} \\ \underline{V}_{im} e^{-jkl} + (V_0 - \underline{V}_{im}) e^{jkl} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{rm} = V_0 - \underline{V}_{im} \\ \underline{V}_{im} (e^{jkl} - e^{-jkl}) = V_0 e^{jkl} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{rm} = V_0 \left(1 - \frac{e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \right) = -V_0 \frac{e^{-jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \\ \underline{V}_{im} = V_0 \frac{e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}} \end{cases}$$

B.29 :

$$r = \frac{V_r(l, t)}{V_i(l, t)} = \frac{V_{rm} e^{j(\omega t + kl)}}{V_{im} e^{j(\omega t - kl)}} = \frac{V_{rm} e^{jkl}}{V_{im} e^{-jkl}} = \frac{V_{rm}}{V_{im}} e^{2jkl}$$

Or :

$$\frac{V_{rm}}{V_{im}} = \frac{-V_0 \frac{e^{-jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}}}{V_0 \frac{e^{jkl}}{e^{jkl} - e^{-jkl}}} = -\frac{e^{-jkl}}{e^{jkl}} = -e^{-2jkl}$$

Donc :

$$r = -e^{-2jkl} e^{2jkl} = -1$$

B.30 : La condition limitée en $z = l$ exprimant que le circuit est ouvert s'écrit : $i(l, t) = 0$. On admet alors que $r = 1$ **B.31** D'après les questions précédentes :

Pour $R = 0$ on a $r = -1$ et pour $R \rightarrow +\infty$ on a $r = +1$. En admettant que r est une fonction continue de R , le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe au moins une valeur de R telle que $r = 0$.

Remarque, la réponse est mathématique car la question est écrite dans ce sens Je ne trouve pas cela satisfaisant, aussi nous allons obtenir la réponse par un calcul complet

Pour cela on revient aux équations de base qu'on a déterminé dans le premier problème et qu'on réécrit avec les notations de ce second problème :

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La solution générale de l'équation de propagation (onde de tension) s'écrit en représentation complexe :

$$\underline{V}(z, t) = \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} + \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Alors :

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{1}{L} \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{L} (-jk \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} + jk \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)})$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{jk}{L} (\underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} - \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)})$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{1}{cL} j\omega (\underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} - \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)})$$

Or :

$$\frac{1}{cL} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Donc :

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\partial}{\partial t} (\underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kz)} - \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kz)})$$

$$\underline{i} = \sqrt{\frac{C}{L}} (\underline{V}_{im} e^{j(\omega t - k)} - \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + k)})$$

Notons \underline{Z} l'impédance en bout de ligne, les conditions aux limites s'écrivent donc dans le cas général

$$\begin{cases} \underline{V}(0, t) = V_0 e^{j\omega t} \\ \underline{V}(l, t) = \underline{Z} i(l, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{im} + \underline{V}_{rm} = V_0 \\ \underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kl)} + \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kl)} = \underline{Z} \sqrt{\frac{C}{L}} (\underline{V}_{im} e^{j(\omega t - kl)} - \underline{V}_{rm} e^{j(\omega t + kl)}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{im} + \underline{V}_{rm} = V_0 \\ \underline{V}_{im} e^{-jkl} + \underline{V}_{rm} e^{jkl} = \underline{Z} \sqrt{\frac{C}{L}} (\underline{V}_{im} e^{-jkl} - \underline{V}_{rm} e^{jkl}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{V}_{im} + \underline{V}_{rm} = V_0 \\ \underline{V}_{im} + \underline{V}_{rm} e^{j2kl} = \underline{Z} \sqrt{\frac{C}{L}} (\underline{V}_{im} - \underline{V}_{rm} e^{j2kl}) \end{cases}$$

On utilise la deuxième équation :

$$\underline{V}_{im} \left(1 - \underline{Z} \sqrt{\frac{C}{L}} \right) = -\underline{V}_{rm} e^{j2kl} \left(1 + \underline{Z} \sqrt{\frac{C}{L}} \right)$$

$$\underline{V}_{rm} e^{j2kl} = \underline{V}_{im} \frac{\underline{Z} \sqrt{\frac{C}{L}} - 1}{\underline{Z} \sqrt{\frac{C}{L}} + 1} = \underline{V}_{im} \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c} \text{ avec } Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\underline{V}_{rm} = \underline{V}_{im} \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c} e^{-j2kl}$$

Si $\underline{Z} = Z_c$ alors $\underline{V}_{rm} = 0$ il n'y a pas d'onde réfléchi. On remarquera que cette condition permet d'annuler l'onde réfléchi pour une pulsation ω vérifiant l'équation $\underline{Z}(\omega) = Z_c$!

Si le signal délivré par le générateur n'est pas périodique, ce montage permet d'éliminer une composante du spectre du signal réfléchi (application en codage ?)

Correction troisième problème.**Partie I**

1. Dans un modèle utilisant la mécanique classique, la force \vec{f} modélise l'interaction de l'électron avec le cristal et les autres électrons libres.
2. On applique la relation fondamentale de la mécanique (ie la seconde loi de Newton) à un électron libre dans un référentiel galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$$

En projection sur Ox :

$$v'(t) + \frac{1}{\tau} v(t) = -\frac{e}{m} E$$

3. La solution de l'équation sans second membre est :

$$v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La solution particulière v_{SP} vérifie :

$$0 + \frac{1}{\tau} v_{SP} = -\frac{e}{m} E$$

$$v_{SP} = -\frac{e\tau}{m} E$$

La vitesse s'écrit :

$$v(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{e\tau}{m} E$$

La condition initiale $v(0) = 0$ permet de calculer A :

$$0 = A - \frac{e\tau}{m} E \quad A = \frac{e\tau}{m} E$$

Finalement :

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m} \vec{E} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

4. \vec{v}_{lim} vérifie :

$$\vec{v}_{lim} = \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

La vitesse limite est atteinte lorsque la force électrique $-e\vec{E}$ est compensée par la force de « freinage » \vec{f} . On remarquera qu'on peut calculer \vec{v}_{lim} à partir de l'équation du mouvement sans résoudre l'équation en utilisant la remarque précédente.

- 5.

$$|v_{lim}| = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5 \cdot 10^{-14}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 0,5 = 0,22 \cdot 10^{31-3} = 0,22 \cdot 10^{-2} m \cdot s^{-1}$$

$$\|\vec{v}(5\tau)\| = |v_{lim}| (1 - e^{-5})$$

$$\left| \frac{\|\vec{v}(5\tau)\| - |v_{lim}|}{|v_{lim}|} \right| = e^{-5} \approx 0,7\%$$

On peut considérer à mieux que 1% que la durée du régime transitoire est de l'ordre de 5τ .

6. Par définition de la densité de courant (s'il n'y a qu'un seul type de charge mobile) :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

ρ est la densité volumique des charges **mobiles (dans un métal ce sont les électrons libres)** et \vec{v} la vitesse des charges mobiles. Or $\rho = N^*(-e)$ donc :

$$\vec{j} = -N^* e \vec{v}$$

Pour $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$:

$$\vec{j} = -N^*e\vec{v} = N^*\frac{e^2\tau}{m}\vec{E}$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \text{ en posant } \sigma = N^*\frac{e^2\tau}{m}$$

Numériquement :

$$\sigma = 6.10^{28} \frac{(1,6.10^{-19})^2 2,5.10^{-14}}{9,1.10^{-31}} = \frac{6 * 1,6^2 * 2,5}{9,1} 10^{28-38-14+31} = 4,2.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$$

Partie II

1. La relation entre l'intensité I d'un courant et le vecteur densité de courant \vec{j} s'écrit :

$$I = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}$$

2. Dans les conditions de validité de la loi locale d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}}(V(x)) = -\sigma \frac{dV}{dx} \vec{u}_x$$

3. \vec{j} est uniforme donc :

$$I = jS = -\sigma S \frac{dV}{dx}$$

$$dV = -\frac{I}{\sigma S} dx$$

$$\int_{V_0}^{V(x)} 1 dV = -\frac{I}{\sigma S} \int_0^x 1. dx \Leftrightarrow V(x) - V_0 = -\frac{x}{\sigma S} I$$

4.

$$R(x) = \frac{V_0 - V(x)}{I} = \frac{x}{\sigma S}$$

5. Pour le conducteur A_1 :

$$S = \pi r_1^2$$

$$\lambda_1 = \frac{R(x)}{x} = \frac{1}{\sigma \pi r_1^2}$$

Pour le conducteur A_2 :

$$S = \pi r_3^2 - \pi r_2^2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sigma \pi (r_3^2 - r_2^2)}$$