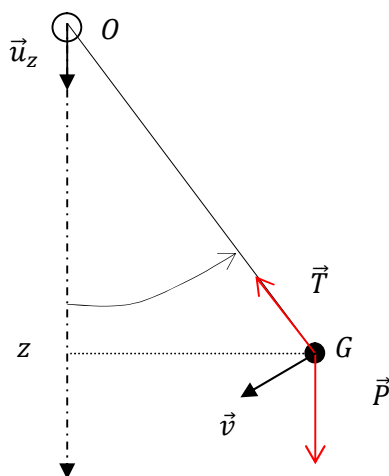


1. En modélisant le pendule par une masse ponctuelle m de vitesse $v = l\dot{\theta}$ on a :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

2. On modélise le pendule réel par un pendule simple composé d'une masse ponctuelle m de centre G tendant un fil de longueur $l = OG$ que nous avons représenté ci-dessous :



Le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ est une force conservative associée à l'énergie potentielle de pesanteur E_p par la relation :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p(z)) \Leftrightarrow mg\vec{u}_z = -\frac{dE_p}{dz}\vec{u}_z \Leftrightarrow dE_p = -mgdz$$

Par intégration :

$$E_p(z) = -mgz + C \text{ avec } C \text{ une constante d'intégration}$$

Or :

$$\cos(\theta) = \frac{|z|}{l} = \frac{z}{l}$$

Donc :

$$E_p(\theta) = -mgl\cos(\theta) + C$$

Pour exprimer la constante A on utilise la condition $E_p(\theta = 0) = 0$ donc $C = mgl\cos(0) + E_p(\theta = 0) = mgl$.

Finalement : $E_p(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta))$.

3. Dans un référentiel galiléen la puissance mécanique dE_m/dt est égale à la somme des puissances des forces non conservatives noté $\sum P_{\vec{F}_{non\ conservative}}$:

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum P_{\vec{F}_{non\ conservative}}$$

Rappel :

D'une façon générale une puissance P est relié à l'énergie E associée par la relation :

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Exemples :

La puissance cinétique P_c associé à l'énergie cinétique E_c s'écrit $P_c = \frac{dE_c}{dt}$

La puissance mécanique P_m associé à l'énergie mécanique E_m s'écrit $P_m = \frac{dE_m}{dt}$

La puissance $P_{\vec{F}}$ d'une force \vec{F} associé au travail $W_{0 \rightarrow t}^{\vec{F}} = \int_0^t \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ (c'est une énergie) s'écrit $P_{\vec{F}} = \frac{dW^{\vec{F}}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

4. La masse m subit deux forces, son poids qui est une force conservative et \vec{T} la tension du fil (supposé tendu) qui est une force non conservative. On applique le théorème de la puissance mécanique à la masse m dans un référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\vec{T}} = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque dans l'exercice (au programme) traitant du pendule simple on a vu que la tension du fil est perpendiculaire à la vitesse de la masse m tendant le fil donc que $\vec{T} \cdot \vec{v} = 0$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2(t) + mgl(1 - \cos(\theta(t))) \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} ml^2 2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) + mgl(0 + \sin(\theta(t)) \dot{\theta}(t)) = 0$$

Remarque : la solution mathématique $\dot{\theta}(t) = 0$ de l'équation précédente n'est pas physiquement intéressante car elle traduit l'équilibre du pendule.

$$l\ddot{\theta}(t) + g \sin(\theta(t)) = 0$$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0$$

Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Remarque on peut aussi raisonner ainsi : en l'absence de frottement l'énergie mécanique du système est constante donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$

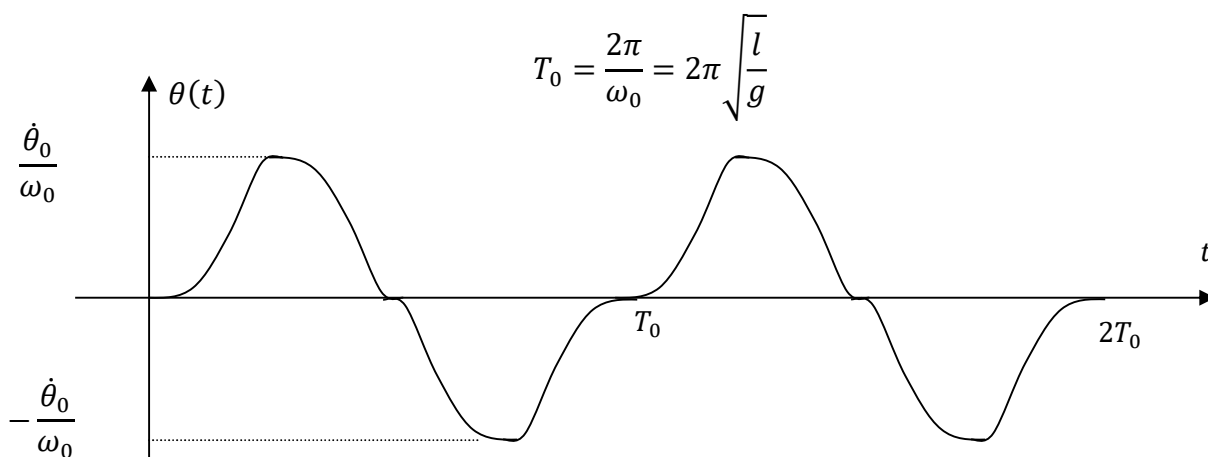
5. Dans le cadre de l'approximation harmonique, l'équation précédente s'écrit $\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0$ de solution générale :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \text{ donc } \dot{\theta}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

On calcul A et B en utilisant les conditions initiales de l'énoncé :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \omega_0 = \dot{\theta}_0 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

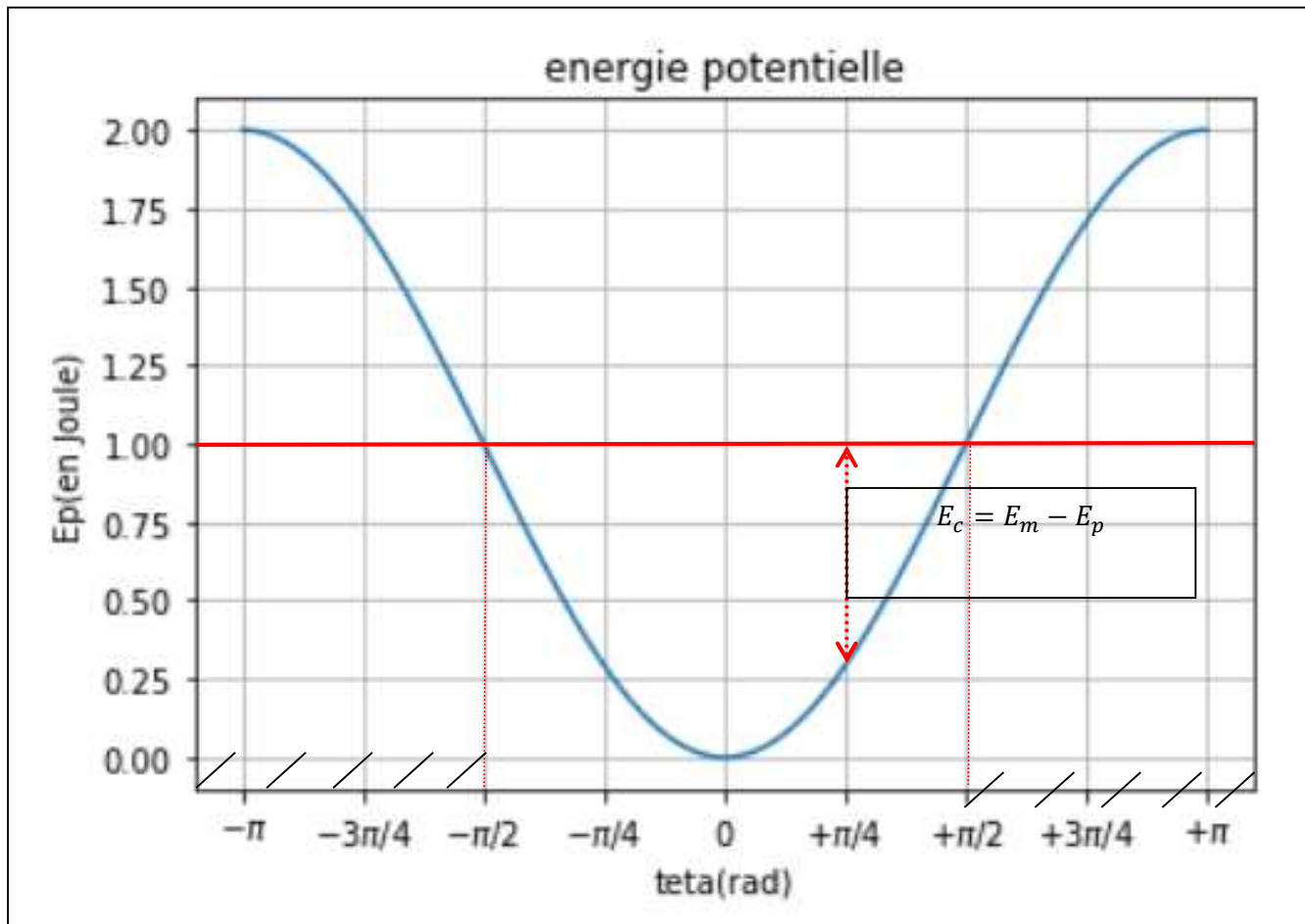


6. En l'absence de frottement, l'énergie mécanique se conserve (le système est conservatif) donc l'énergie mécanique est à tout instant égale à l'énergie mécanique initiale :

$$E_m = E_{m0} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1 - \cos(\theta(0)))$$

$$E_m = \frac{1}{2}0,2 * 10 + 0 = 1J$$

7. On utilise la représentation graphique de l'énergie potentielle en y ajoutant la courbe de l'énergie mécanique d'équation $E_m(\theta) = 1J$:



La zone accessible par l'oscillateur vérifie l'inéquation (traduisant que $E_c \geq 0$) :

$$E_m \geq E_p(\theta)$$

Par lecture graphique la solution de l'inéquation précédente est $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. La position angulaire maximale sera donc $\theta_{max} = \pi/2$.

Remarque la notation θ_0 pour désigne θ_{max} prête à confusion !

8. On réalise une acquisition en un intervalle de temps T_e , il faut donc un temps $600\,000T_e$ pour réaliser 600 000 acquisitions (supposées périodiques !) :

$$600\,000T_e = 300s$$

$$f_e = \frac{1}{T_e} = \frac{600\,000}{300} = 2000Hz = 2kHz$$

9. Un analyseur de spectre généralement présent dans un oscilloscope (fonction Fast Fourier Transform)

10. Il faut bien lire l'énoncé et surligner (ou souligner, encadrer) les relations et les hypothèses de l'énoncé par exemple la relation $u(t) = k\theta(t)$ qui traduit la mesure de l'angle $\theta(t)$ par la tension $u(t)$.

L'énoncé précise que :

- Si $\theta_0 < 30^\circ\text{C}$ alors le pendule est isochrone (sa période T_0 ne dépend pas de son amplitude θ_0) et vérifie :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t) \text{ avec } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Ce signal présente une seule fréquence $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.

- Si $\theta_0 > 30^\circ\text{C}$ alors le pendule n'est pas isochrone et vérifie :

$$\theta(t) = \theta_0 \left(\sin(\omega_0' t) + \frac{\theta_0^2}{192} \sin(3\omega_0' t) \right) \text{ avec } T_0' = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Ce signal présente deux fréquences fréquence : $f_0' = \omega_0'/(2\pi)$ et $3f_0' = 3\omega_0'/(2\pi)$

L'isochronisme se traduit donc par l'observation d'un spectre de $\theta(t)$ présentant une seule fréquence. Or Le spectre de $u(t)$ est identique au spectre de $\theta(t)$ car on a $u(t) = k\theta(t)$ ou k est une constante.

On conclut que on observe l'isochronisme sur les intervalles 2 et 4 puisqu'ils montrent un spectre à une seule fréquence.

On remarque également que l'amplitude de l'oscillateur est doublée lorsqu'on passe de l'intervalle 2 à l'intervalle 4 alors que l'unique fréquence reste constante. Ceci atteste l'isochronisme de l'oscillateur puisque son unique fréquence f_0 est indépendante de son amplitude et donc que sa période T_0 est indépendante de son amplitude θ_0 .

11. Les intervalles 1 et 3 présentent des spectres à deux fréquences, dont le rapport est $\frac{f_{max}}{f_{min}} = 3$ ce qui correspond au modèle décrit par l'énoncé pour un oscillateur non harmonique.

12. Par lecture graphique des spectres des intervalles 2 et 4 on a $f_0 = 1\text{Hz}$.

13. D'après le modèle de l'énoncé on doit observer :

$$f_{1b} = 3f_{1a} = 3 * 0,75\text{Hz} = 2,25\text{Hz}$$

Effectivement on lit sur le spectre de l'intervalle 1 une raie à la fréquence $2,25\text{Hz}$ de faible amplitude par rapport à la raie de fréquence $0,75\text{Hz}$.

On remarquera qu'on observe également, dans le spectre de l'intervalle 3, deux raies dont le rapport des fréquences $\left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right)$ est bien de 3 comme prévu par la théorie de l'énoncé. Mais la valeur de chaque fréquence a changée car l'amplitude a changée entre l'intervalle 1 et l'intervalle 3 (cf graphique) et comme la fréquence dépend de l'amplitude, pour un oscillateur non harmonique, il est normal d'observer un changement de valeur pour les fréquences.

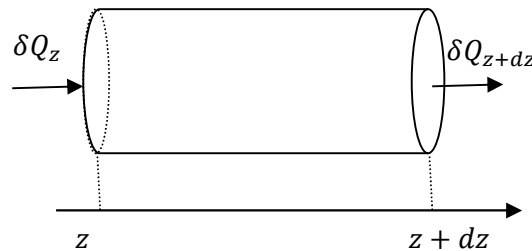
14. Dans certaines conditions expérimentales la densité de flux thermique \vec{j}_{th} (en $W \cdot m^{-2}$), la conductivité thermique λ (en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$) et la température T (en K) en un point M sont liés par la relation :

$$\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \overrightarrow{grad}(T(M, t))$$

15. Dans les conditions de l'expérience (régime stationnaire et unidirectionnel selon l'axe Oz) :

$$\vec{j}_{th}(z) = -\lambda \frac{dT}{dz} \mathbf{u}_z$$

16. L'énoncé précise de faire un bilan enthalpique, ce que revient à appliquer le premier principe sous la forme $dH = \delta Q$. Cette relation est valable lorsque le système subit une transformation monobare (c'est-à-dire à pression extérieure constante, ce qui est le cas ici).



On applique le premier principe au système $\{z, z + dz\}$ (de volume $dV = Sdz = \pi a^2 dz$) entre les instants t et $t + dt$:

$$dH = \delta Q = \delta Q_z - \delta Q_{z+dz}$$

En régime stationnaire : $dH = H(z, t + dt) - H(z, t) = 0$ donc :

$$0 = j_{th}(z)Sdt - j_{th}(z + dz)Sdt$$

$$j_{th}(z) = j_{th}(z + dz)$$

j_{th} ne dépend pas de z donc $\frac{dT}{dz}$ ne dépend pas de z :

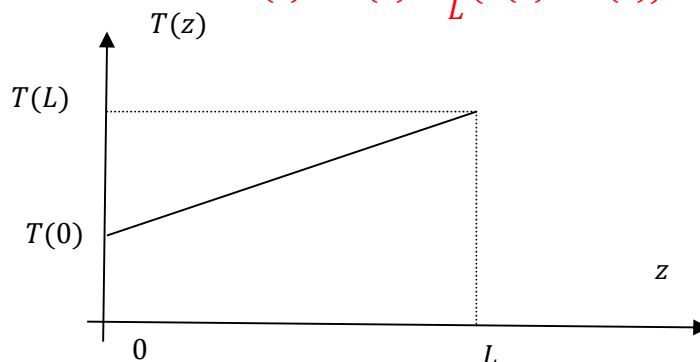
$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0$$

17. La solution de l'équation précédente s'écrit : $T(z) = az + b$

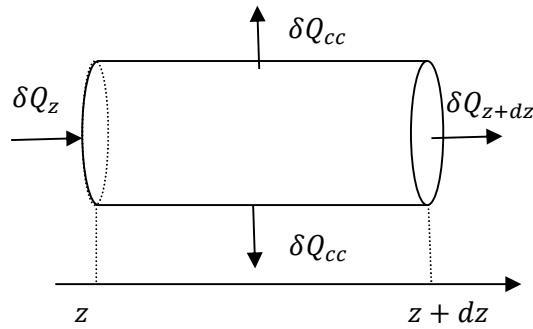
On calcule les constantes a et b par les conditions aux limites (et non pas les conditions initiales !) :

$$\begin{cases} T(0) = T(0) \\ T(L) = T(L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = T(0) \\ aL + b = T(L) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = T(0) \\ a = (T(L) - T(0))/L \end{cases}$$

$$T(z) = T(0) + \frac{z}{L}(T(L) - T(0))$$



18. On fait, à nouveau un schéma montrant tous les transferts thermiques intervenant dans la nouvelle étude.



On applique le premier principe de la thermodynamique au système au système $\{z, z + dz\}$ (de volume $dV = Sdz = \pi a^2 dz$) entre les instants t et $t + dt$:

$$dH = \delta Q = \delta Q_z - \delta Q_{z+dz} - \delta Q_{cc} \text{ avec}$$

$$\delta Q_{cc} = \vec{j}_{cc} \cdot d\vec{S}_{laterale} dt = h(T(z, t) - T_{ext}) \vec{u}_r dS_{laterale} \vec{u}_r dt = h(T(z, t) - T_{ext}) 2\pi a dz dt$$

En régime stationnaire (*): $dH = H(z, t + dt) - H(z, t) = 0$

Donc :

$$j_{th}(z) \pi a^2 dt - j_{th}(z + dz) \pi a^2 dt - h(T(z, t) - T_{ext}) 2\pi a dz dt = 0$$

$$-\frac{j_{th}(z + dz) - j_{th}(z)}{dz} a - 2h(T(z, t) - T_{ext}) = 0$$

$$-\frac{dj_{th}(z)}{dz} - 2h(T(z, t) - T_{ext}) = 0$$

$$a\lambda \frac{d^2 T(z)}{dz^2} - 2h(T(z, t) - T_{ext}) = 0$$

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} - \frac{2h}{a\lambda} (T(z, t) - T_{ext}) = 0$$

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} - \frac{2h}{a\lambda} T(z, t) = -\frac{2h}{a\lambda} T_{ext}$$

Par identification on pose :

$$\frac{2h}{a\lambda} = \delta^2$$

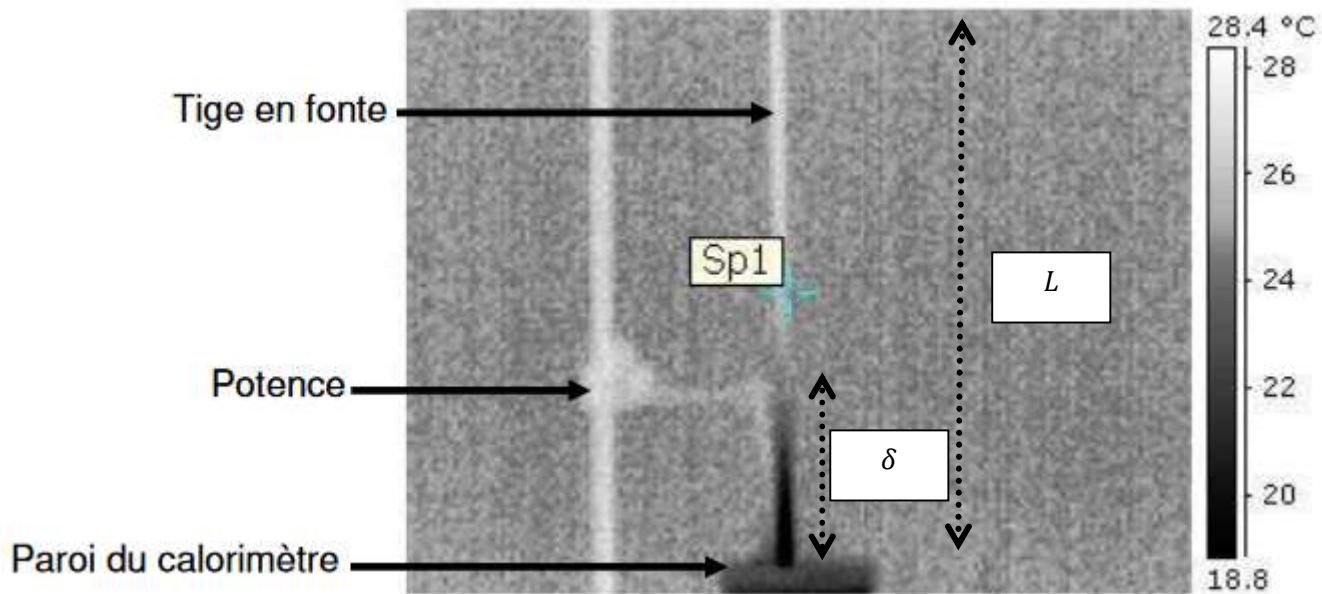
(sinon (*) $dH = H(z, t + dt) - H(z, t) = \rho cdV(T(z, t + dt) - T(z, t)) = \rho cdz\pi a^2(T(z, t + dt) - T(z, t))$)

19. L'échelle de couleur située à droite de la photographie permet de déterminer la température **d'un solide** en fonction de la couleur perçue de ce solide.

La potence présente une température homogène égale à T_{ext} traduisant l'équilibre thermique entre la potence et l'air (pour cela il est nécessaire que la potence soit présente dans la pièce depuis un temps suffisant pour que cet équilibre ait eu le temps de se réaliser).

La tige en fonte n'est pas de couleur homogène donc la température dans la tige en fonte n'est pas homogène. On observe une variation de couleur de la tige en fonte sur une longueur $\delta < L$ (cf schéma) on conclut que la distance δ caractéristique de la variation de la température dans la fonte est bien inférieure à L .

La couleur du haut de la tige est semblable à la couleur de la potence donc $T(L) \approx T_{ext}$.



20. D'après l'énoncé :

$$T(z) = T_{ext} + (T(0) - T_{ext})e^{-\frac{z}{\delta}}$$

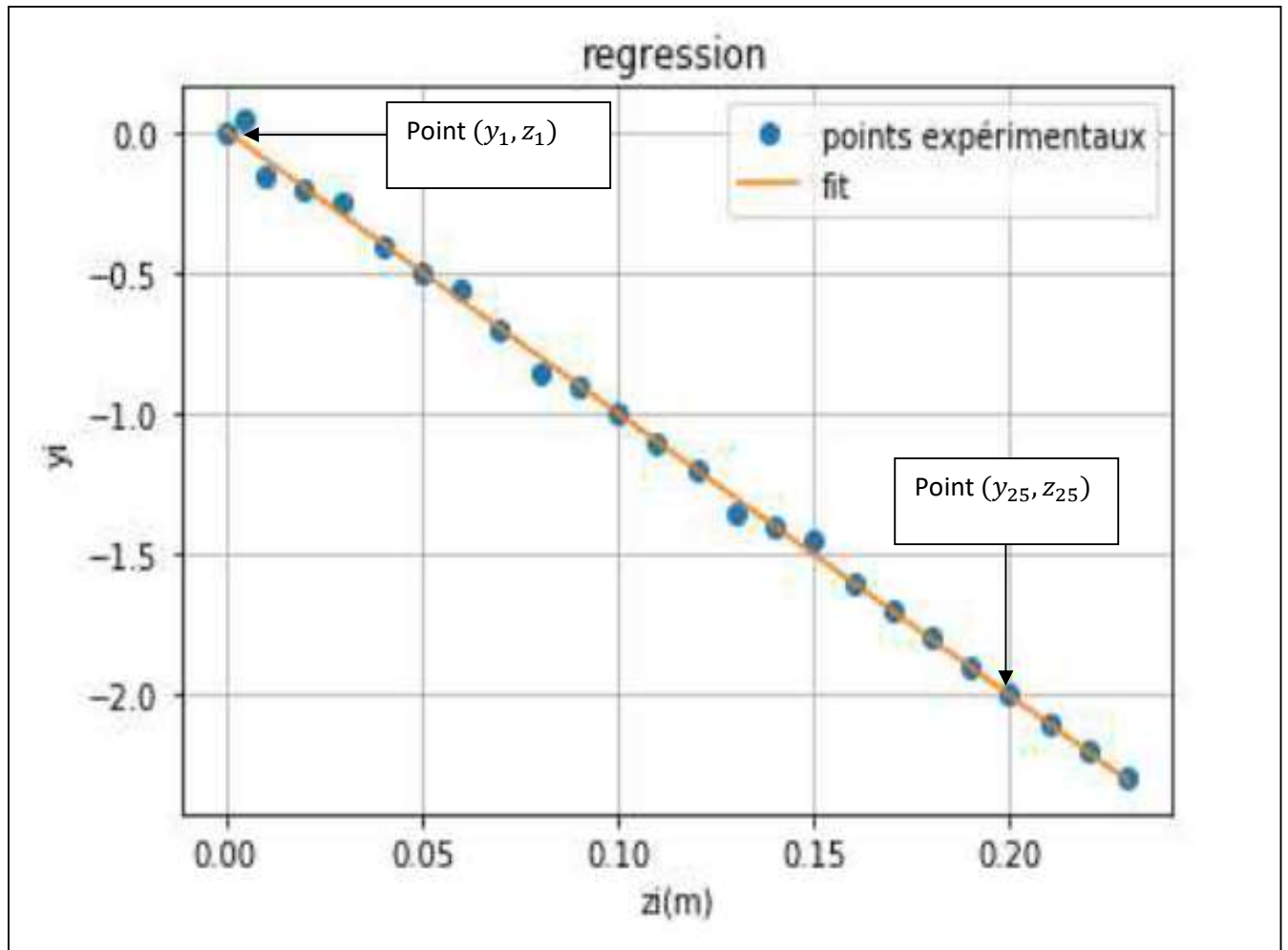
En notant z_i la position d'un thermocouple mesurant la température $T_i = T(z_i)$ on a :

$$T_i - T_{ext} = (T(0) - T_{ext})e^{-\frac{z_i}{\delta}}$$

$$e^{-\frac{z_i}{\delta}} = \frac{T_i - T_{ext}}{T(0) - T_{ext}}$$

$$-\frac{z_i}{\delta} = \ln\left(\frac{T_i - T_{ext}}{T(0) - T_{ext}}\right) = y_i$$

On doit donc obtenir en traçant $y_i = f(z_i)$ une droite de pente $-1/\delta$ passant par l'origine. On remarque que y_i est sans dimension donc δ est homogène à une longueur (on le savait déjà).



On obtient un « alignement » des points expérimentaux selon une droite de régression de pente p

$$p = \frac{y_{25} - y_1}{z_{25} - z_1} = \frac{-2.0 - 0.0}{0.20 - 0.00} = -\frac{2.0}{0.20} = -10m^{-1}$$

$$\delta = -\frac{1}{p} = 0,10m$$

Remarque les données de l'énoncé sont fournies avec deux chiffres significatifs, on donne donc δ avec deux chiffres significatifs.

21. Rappels Scilab

- un tableau en Scilab est un vecteur, c'est-à-dire une matrice à 1 ligne.
- Soit N un entier naturel non nul, les N éléments d'un tableau de réels t se repèrent par les variables réelles $t(i)$ pour i élément de $\llbracket 1; N \rrbracket$.

Version 1 utilisant les opérations sur les vecteurs :

(rappels pour $t = [t_1, t_2, t_3]$ on a $\exp(-kt) = [\exp(-kt_1), \exp(-kt_2), \exp(-kt_3)]$)

```

function tab_Ttheo=Temp(t, k)
  tab_Ttheo = 30*(1-exp(-k*t));
endfunction

```

Version 2 sans utiliser les opérations sur les vecteurs :


```

function tab_Ttheo = Temp(t, k)
    n = length(t) // n nombre de coefficients du vecteur t
    tab_Ttheo = zeros(1,n) ;
    for i = 1:n
        tab_Ttheo(i)=30*(1-exp(-k*t(i))) ;
    end
endfunction

```

22. Le vecteur *tab_T* contient les *N* valeurs des températures mesurées et *tab_Ttheo* = *Temp*(*tab_Temp*, *k*) permet d'obtenir les *N* valeurs des températures théoriques aux instants *t_i*

```

function e = erreur(k)
    n = length(t) // n nombre de coefficients du vecteur t
    tab_Ttheo = zeros(1,n) ;
    tab_Ttheo = Temp(tab_temps,k) ;
    e = sum((tab_T-tab_Ttheo)^2) ;
endfunction

```

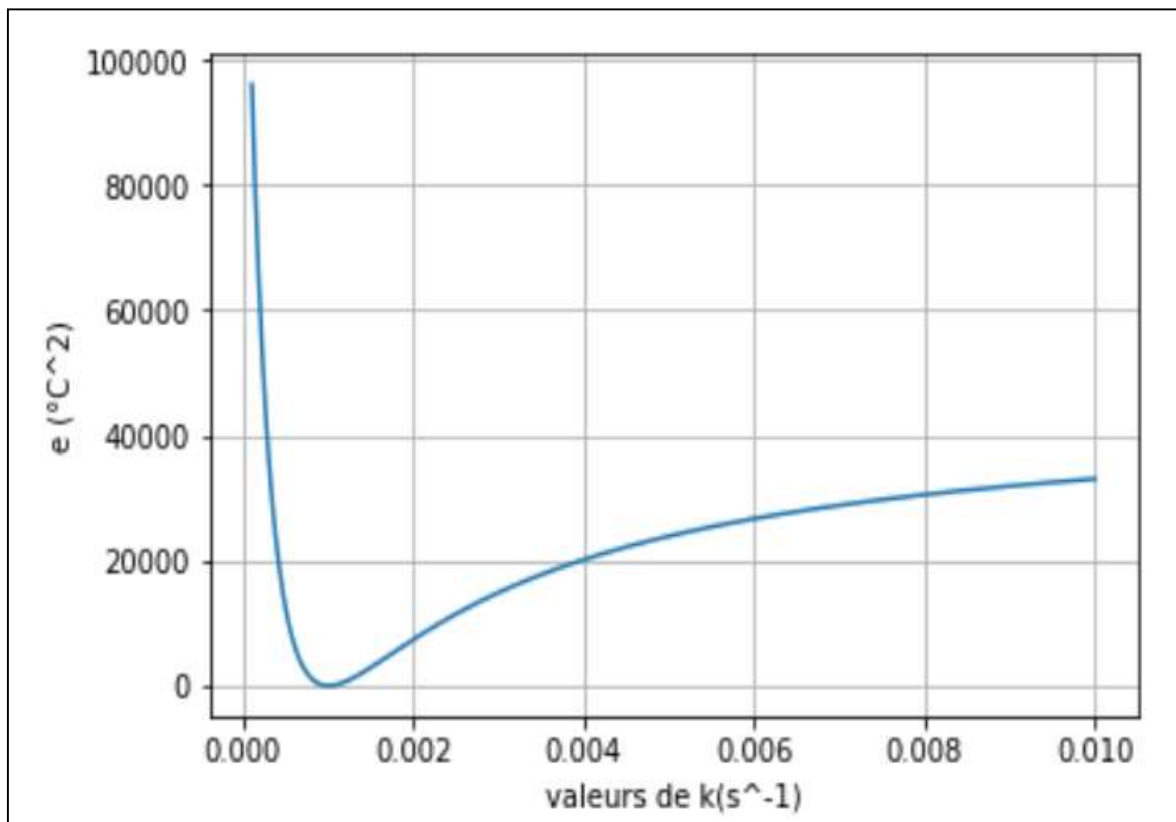
23. Une version

```

n = 100
k = linspace(1e-4),1e-2,n) //1e-2 pour 0.01
tab_e = zeros(1,n)
for i = 1:n
    tab_e(i)=erreur(k(i))
end
plot(k, e) // traçage de la courbe e(k) non demandé

```

24. On cherche la valeur de *k* minimisant la quantité *e(k)*



Par lecture graphique, la valeur de *k* minimisant *e(k)* est : $k = 0.001 \text{ s}^{-1}$

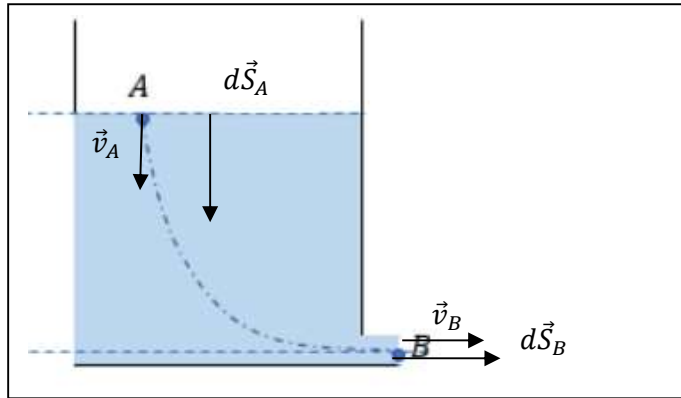
$$h = \frac{\rho c a k}{2} = \frac{5.10^3 * 4.10^2 * 5.10^{-3} * 10^{-3}}{2} = \frac{100}{2} \cdot 10^{-1} = 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

D'après l'énoncé $\lambda(SI) = 4h(SI) = 4 * 5 = 20 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

25. L'écoulement est stationnaire et le fluide est incompressible donc il y a conservation du débit volumique :

$$D_{v,A} = D_{v,B}$$

$$\iint_{A \in S_A} \vec{v}_A \cdot d\vec{S}_A = \iint_{B \in S_B} \vec{v}_B \cdot d\vec{S}_B \Leftrightarrow \iint_{A \in S_A} v_A \cdot dS_A = \iint_{B \in S_B} v_B \cdot dS_B$$



\vec{v}_A étant uniforme sur $S_A = S$ et \vec{v}_B étant uniforme sur $S_B = s$ la conservation du débit volumique se traduit par la relation : $v_A S = v_B s$.

Rappel la conservation de la masse se traduit par localement (à l'échelle mésoscopique) par l'équation (*):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

En régime stationnaire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Le fluide est incompressible donc sa masse volumique ρ est constante : $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v})$

Dans ces conditions l'équation de conservation de la masse s'écrit : $\text{div}(\vec{v}) = 0$. On peut alors affirmer que \vec{v} est un vecteur à flux conservatif :

$$\iint_{A \in S_A} \vec{v}_A \cdot d\vec{S}_A = \iint_{B \in S_B} \vec{v}_B \cdot d\vec{S}_B$$

L'équation $\text{div}(\vec{v}) = 0$ traduit la conservation du débit volumique.

(*) revoir la démonstration à une dimension qui est exigible !

26. L'écoulement est stationnaire et parfait, le fluide est incompressible et uniquement soumis aux forces de pression et de gravité, on applique la relation de Bernoulli entre les points A et B d'une même ligne de courant :

$$\begin{aligned} P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 &= P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 \\ \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) &= P_A - P_B + \rho g h \\ \frac{1}{2} \rho v_B^2 \left(1 - \frac{s^2}{S^2} \right) &= P_A - P_B + \rho g h \end{aligned}$$

27. On a $s \ll S$ donc $1 - \frac{s^2}{S^2} \approx 1$. Le point A est en contact avec l'air libre de pression P_0 donc $P_A = P_0$, de même $P_B = P_0$ on obtient la formule de Toricelli : $v_B = \sqrt{2gh}$.

Cette formule traduit la conversion d'énergie potentielle de pesanteur en énergie cinétique comme pour une masse ponctuelle m uniquement soumise aux forces de gravité (vitesse initiale nulle) et lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h au dessus du sol ($z = 0$) :

$$E_m(z = 0) = E_m(h) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mg0 = 0 + mgh = mgh \Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$$

28. *Question délicate mais classique !* La conservation du débit volumique s'écrit : $v_A = v_B \frac{S}{S}$

v_A est la norme du vecteur vitesse (un débit volumique $v_A S$ est positif !) :

$$v_A = \|\vec{v}_A\| = \left| \frac{dz_A}{dt} \right| = \left| \frac{dh}{dt} \right|$$

Or le niveau h du liquide décroît donc

$$\frac{dh}{dt} < 0 \text{ et donc } \left| \frac{dh}{dt} \right| = -\frac{dh}{dt}$$

La conservation du débit volumique se traduit par l'équation non linéaire vérifiée par h :

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2gh}^{\frac{1}{2}}$$

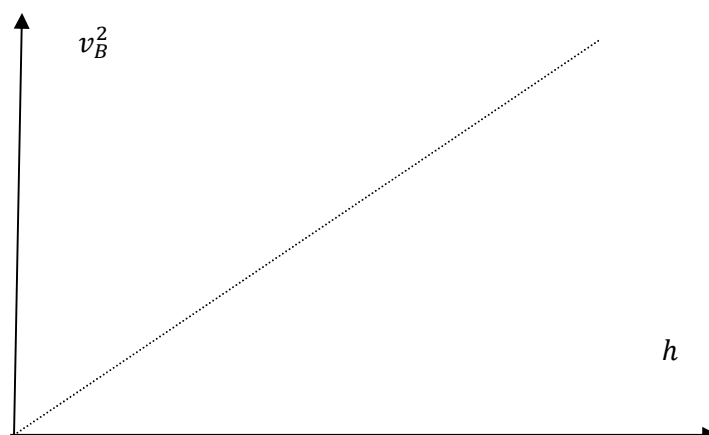
On résout cette équation par variable séparable :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} dh &= -\frac{s}{S} \sqrt{2g} dt \\ \int_{h(0)}^{h(t)} h^{-\frac{1}{2}} dh &= -\frac{s}{S} \sqrt{2g} \int_0^t dt = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} t \\ \left[2h^{\frac{1}{2}} \right]_{h(0)}^{h(t)} &= -\frac{s}{S} \sqrt{2g} t \\ \sqrt{h(t)} - \sqrt{h(0)} &= -\frac{1}{2} \frac{s}{S} \sqrt{2g} t \\ z_A(t) = h(t) &= \left(\sqrt{h(0)} - \frac{1}{2} \frac{s}{S} \sqrt{2g} t \right)^2 \end{aligned}$$

Le récipient est vide à l'instant t vérifiant $h(t) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{s}{S} \sqrt{2g} t &= \sqrt{h(0)} \\ \frac{S}{s} &= \frac{t}{2} \sqrt{\frac{2g}{h(0)}} = \frac{10}{2} \sqrt{2 * \frac{10}{0.2}} = 5\sqrt{100} = 50 \end{aligned}$$

29. La relation $v_B^2 = 2gh$ se traduit par une relation linéaire entre v_B^2 et h dont la pente est $2g$. La représentation graphique de v_B^2 en fonction de h est donc une droite de pente théorique $20m \cdot s^{-2}$



30. Le débit massique D_m s'écrit pour une vitesse d'écoulement uniforme sur la section $s = \pi r^2$ et pour un fluide incompressible :

$$D_m = \rho s v = \rho \pi r^2 v$$

$$v = \frac{1}{\rho \pi r^2} D_m = \frac{1}{\rho \pi r^2} \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

31. On se rappelle que la loi de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie et que chacun de ses termes est une **énergie volumique**. L'énoncé précise qu'il y a des pertes de charges singulières, c'est-à-dire une perte d'énergie par frottement visqueux, ces pertes de charges étant caractérisé par w_f **travail massique** donc homogène à une énergie massique.

Donc attention il ne faut pas ajouter w_f à $\frac{1}{2}\rho v^2$ car ces deux termes ne sont pas homogènes : il faut écrire

$$w_f = \frac{W}{m} = \frac{W}{\rho V}$$

$$\rho w_f = \frac{W}{V}$$

ρw_f est homogène à une énergie volumique !

On écrit alors :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \rho g z_b + \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho w_f$$

En A l'énergie volumique 'initiale' en B l'énergie volumique 'finale' : en présence de phénomène dissipatif on doit observer une énergie du fluide qui diminue lors de son écoulement on doit donc observer :

$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A - (P_B + \rho g z_b + \frac{1}{2}\rho v_B^2) < 0$ ce qui est le cas en écrivant :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \rho g z_b + \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho w_f$$

Après simplification on obtient :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho w_f$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_B^2 - \rho w_f$$

$$\frac{1}{2}v_B^2 - w_f = g h$$

$$\frac{1}{2}v_B^2 + \frac{1}{2}K v_B^2 = g h$$

$$v_B^2 = \frac{2g}{1+K} h$$

On obtient bien un terme v_B^2 plus faible en présence de frottement car :

$$\frac{1}{1+K} \leq 1$$

32. Le graphique permet de conjecturer une relation linéaire entre le terme expérimental v_B^2 et la hauteur h de chute. On mesure la pente expérimentale, en choisissant deux points le plus proche de la courbe et pas trop proche l'un de l'autre :

$$p = \frac{1,50 - 1,00}{0,150 - 0,100} = \frac{0,50}{0,050} = \frac{50}{5} = 10 \frac{m^2 \cdot s^{-2}}{m} = 10 m \cdot s^{-2}$$

On garde deux chiffres significatifs. On obtient K en égalisant la pente expérimentale et la pente théorique :

$$\frac{2g}{1+K} = p \Leftrightarrow K = \frac{2g}{p} - 1 = \frac{20}{10} - 1 = 1$$

33. On a :

$$h = \frac{H}{m} = \frac{mc_p T}{m} = c_p T$$

Donc :

$$h_s - h_e = c_p (T_s - T_e)$$

34. On applique le premier principe des systèmes ouverts (ou des systèmes industriels) :

$$D_m \left(h_s + \frac{1}{2} v_s^2 + \rho_s g z_s \right) - D_m \left(h_e + \frac{1}{2} v_e^2 + \rho_e g z_e \right) = P_{th} + P_i$$

Or $v_e \ll v_s$ et on néglige les variations d'énergie potentielle massique de pesanteur :

Donc :

$$D_m \left(c_p (T_s - T_e) + \frac{1}{2} v_s^2 \right) = P_{th} + P_i$$

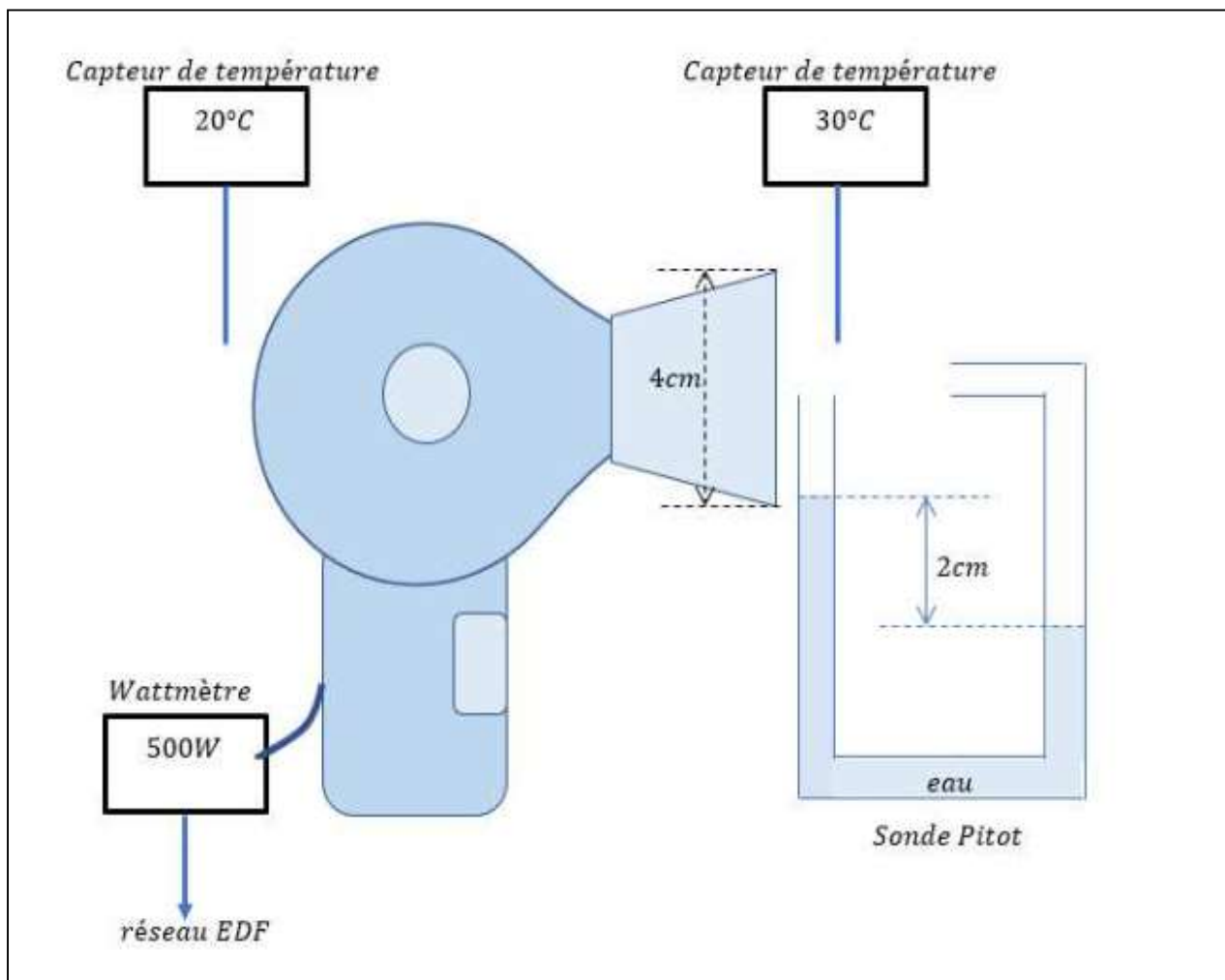
35. Un sèche-cheveux consomme une puissance électrique P_{elec} dont une partie est convertie en puissance utile comportant une puissance cinétique P_i et une puissance thermique P_{th} fournie au flux d'air : le rendement s'écrit alors :

$$\eta = \frac{P_{th} + P_i}{P_{elec}} = \frac{D_m \left(c_p (T_s - T_e) + \frac{1}{2} v_s^2 \right)}{P_{elec}}$$

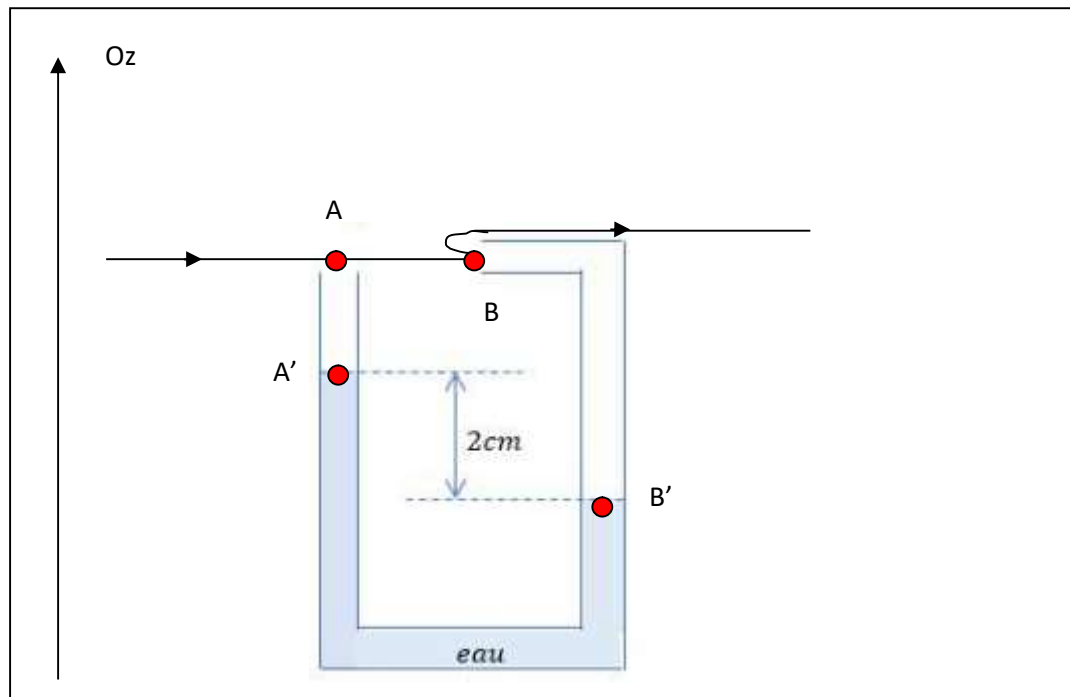
Par lecture graphique :

$$P_{elec} = 500W, T_s - T_e = (273 + 30) - (273 + 20) = 10K$$

Il reste à déterminer la vitesse v_s et le débit massique $D_m = \rho S v_s$



La sonde de pitot permet de mesurer la vitesse d'écoulement v_s . Sur le schéma suivant B, en régime stationnaire, est un pint arrêt ($v_B = 0$) et la hauteur entre les deux niveaux de l'eau est constante



Dans le tube, en régime stationnaire, il n'y a pas d'écoulement, on applique la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$P_A - P_B = P_A - P_{A'} + P_{A'} - P_{B'} + P_{B'} - P_B = -\rho_{air}gh_{AA'} - \rho_{eau}gh + \rho_{air}gh_{BB'}$$

Or $\rho_{air} \ll \rho_{eau}$ donc :

$$P_A - P_B = -\rho_{eau}gh$$

On suppose que les conditions sont réunies pour appliquer la relation de Bernoulli à l'air (l'air est un gaz, la condition d'écoulement incompressible est vérifiée si la vitesse de l'air est négligeable devant la vitesse du son dans l'air soit $v_A \ll 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Or $z_A \approx z_B$ et $v_B = 0$ donc :

$$P_A - P_B = -\frac{1}{2}\rho v_A^2$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho_{eau}gh$$

$$v_A = \sqrt{2 \frac{\rho_{eau}}{\rho} gh}$$

Numériquement :

$$v_s = v_A = \sqrt{2 \frac{10^3}{1} 10 * 2 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{2^2 10^2} \approx 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \text{on a bien } v_A \ll 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

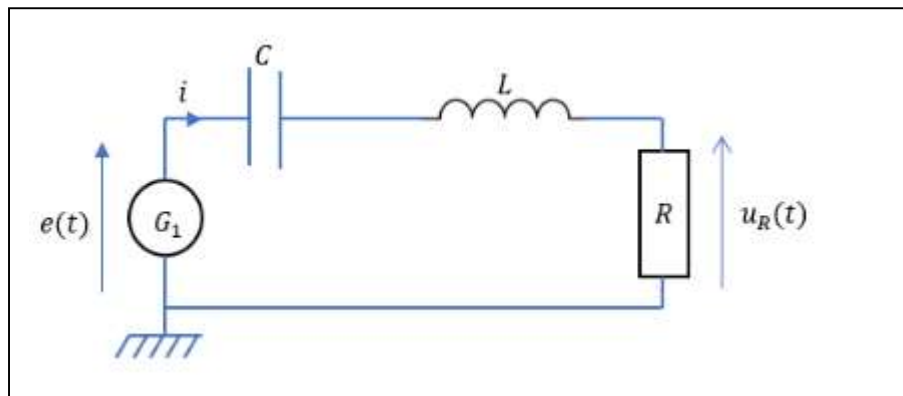
On a également :

$$D_m = \rho \pi r^2 v_s = 1. \pi (2.10^{-2})^2 20 = \pi * 8.10^{-3} \approx 25.10^{-3} kg. s^{-1}$$

Ainsi :

$$\eta = \frac{D_m \left(c_p (T_s - T_e) + \frac{1}{2} v_s^2 \right)}{P_{elec}} = \frac{25.10^{-3} \left(10^3 * 10 + \frac{1}{2} 20^2 \right)}{500} \approx \frac{250}{500} = 50\%$$

36.



L'association série R, L, C a une impédance \underline{Z} qui s'écrit :

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

37. Les tensions complexes $\underline{e}(t)$ et $\underline{u}_R(t)$ vérifient :

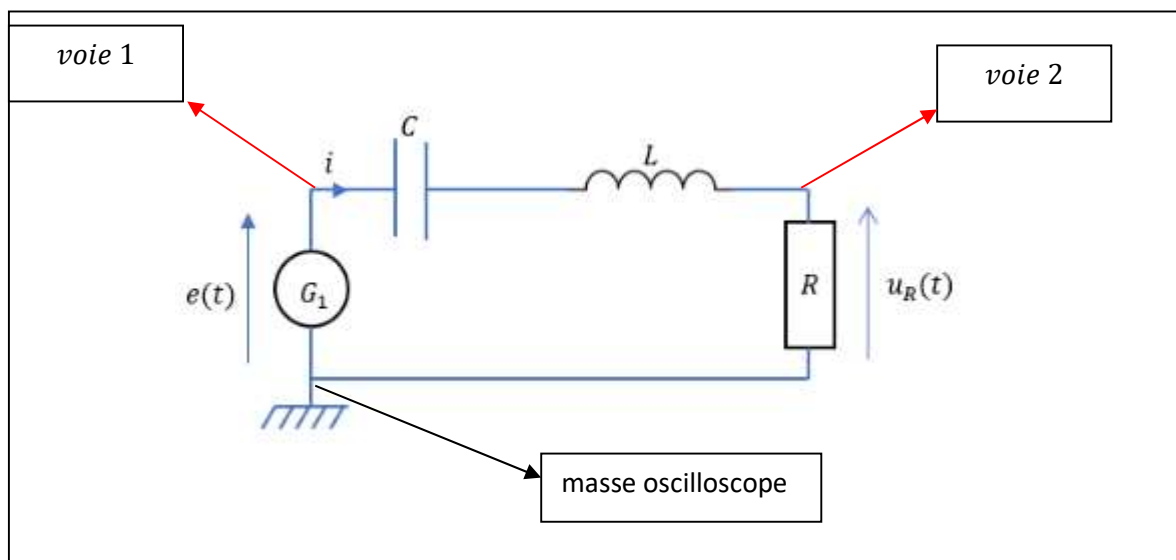
$$\underline{e}(t) = \underline{Z} \cdot \underline{i}(t) \text{ et } \underline{u}_R(t) = R \underline{i}(t)$$

Pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ on a :

$$f = 2\pi\omega = 2\pi \frac{1}{\sqrt{LC}} = f_0$$

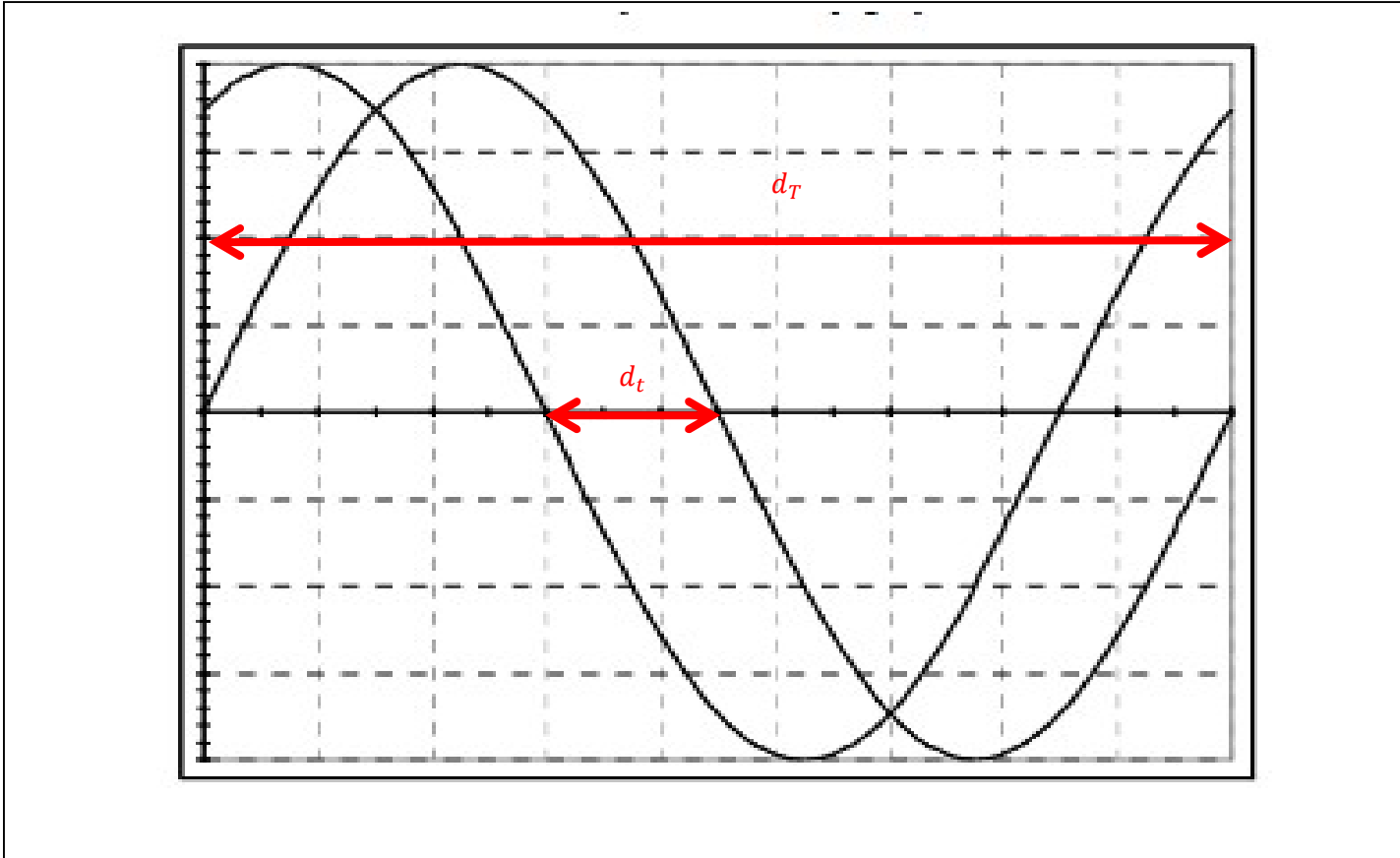
Alors $\underline{Z} = R$ et $\underline{e}(t) = R \underline{i}(t) = \underline{u}_R(t)$: les tensions $\underline{e}(t)$ et $\underline{u}_R(t)$ sont en phases

38.



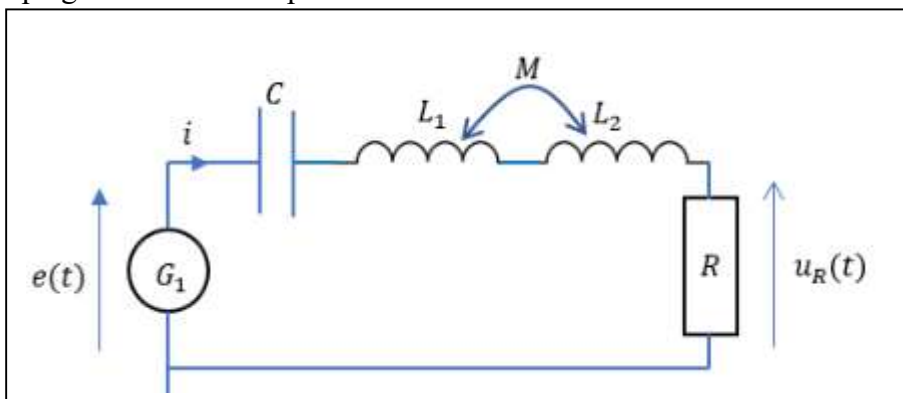
39. Les deux signaux sont déphasés de $\Delta\phi$ avec :

$$|\Delta\phi| = 2\pi \frac{d_t}{d_T} = 2\pi \frac{1,5}{9} = \frac{\pi}{3}$$

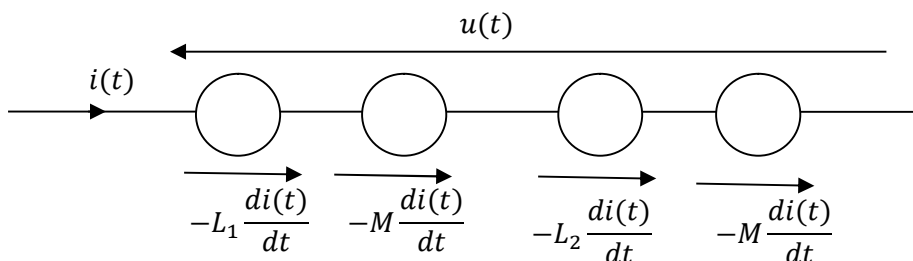


40. La question est hors programme. En mode X.Y et pour deux signaux (de même fréquence) déphasés on observe sur l'écran de l'oscilloscope une ellipse. Si de plus les deux signaux sont en phase on observe un segment de droite. On peut ainsi déterminer f_0 en recherchant à observer une droite en mode XY en réglant la fréquence sur le GBF. On obtient alors une mesure de $f_0 = 2\pi \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et donc une mesure de L si on connaît C .

41. Lorsque les deux bobines sont suffisamment proches on doit tenir compte du couplage magnétique des deux bobines. Ce couplage est caractérisé par la mutuelle M



Le schéma électrique associé aux bobines ainsi couplées est le suivant :



$$u = - \left(-L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \right) - \left(-L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \right) = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = -(-L_{eq} \frac{di}{dt})$$

L'ensemble des phénomènes d'induction est alors équivalent à une auto-induction dans une bobine dont l'inductance propre L_{eq} s'écrit : $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$.

42. M dépend de la géométrie des deux bobines et de leur orientation spatiale relative. Pour une disposition des deux bobines fixée, M prend une valeur déterminée qui peut être positive ou négative, si l'on permute les branchements de l'une des deux bobines, M change de signe mais ne change pas de valeur en valeur absolue.

Pour une disposition relative fixée des deux bobines, M peut prendre l'une des deux valeurs $\{|M|, -|M|\}$.

43. En utilisant l'une des méthodes décrit dans les questions précédentes on détermine la fréquence $f_{0,1}$ pour une disposition fixée des deux bobines puis on permute les branchements de l'une des deux bobines, **sans modifier les positions et les orientations des deux bobines**, et on détermine de même la fréquence $f_{0,2}$ associée.

$$L_{eq-} = L_1 + L_2 - 2|M| \text{ et } f_{0,1} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_{eq-}C}}$$

$$L_{eq+} = L_1 + L_2 + 2|M| \text{ et } f_{0,2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_{eq+}C}}$$

Remarque on a :

$$L_{eq+} > L_{eq-} \Rightarrow \sqrt{L_{eq+}C} > \sqrt{L_{eq-}C} \Rightarrow f_{0,2} < f_{0,1}$$

On mesure $f_{0,1}$ et $f_{0,2}$ on peut en déduire la valeur de $|M|$ par la formule finale suivante :

$$|M| = \frac{1}{4} (L_{eq+} - L_{eq-}) = \frac{1}{16\pi^2 C} \left(\frac{1}{f_{0,2}^2} - \frac{1}{f_{0,1}^2} \right)$$

44. Effectuons une analyse dimensionnelle de l'équation de propagation :

$$\frac{[y]}{[x^2]} = \frac{1}{[v]^2} \frac{[y]}{[t^2]} \Rightarrow [v] = \frac{[x]}{[t]} = L \cdot T^{-1}$$

v est homogène à une vitesse, c 'est la célérité de propagation des ondes mécaniques sur la corde.

45. L'écriture de $y(x, t)$ montre une séparation fonctionnelle entre la variable d'espace et la variable temporelle, $y(x, t)$ décrit une onde stationnaire, donc une onde ne se propageant pas. Une onde stationnaire s'établit, sous certaines conditions, par interférence d'une onde incidente et de l'onde réfléchi sur l'une des extrémités fixes.

46. On a :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Y_0''(x) \sin(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 Y_0(x) \sin(\omega t)$$

En utilisant l'équation de propagation on obtient :

$$Y_0''(x) = -k^2 Y_0(x) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

47. La solution de l'équation précédente s'écrit :

$$Y_0(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

La corde est fixée en $x = 0$ à tout instant, ce qui se traduit par la relation $y(0, t) = 0$ qui impose donc $B = 0$.

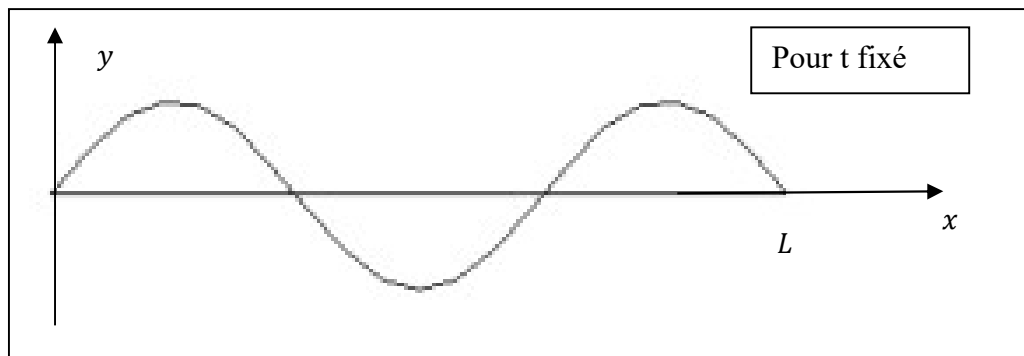
La corde est fixée en $x = L$ à tout instant, ce qui se traduit par $y(L, t) = 0$ qui impose $\sin(kL) = 0$ et donc

$$k = p\pi/L \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement, d'après le cours on a alors :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{p}$$

48. Pour $p = 3$ on observe $p = 3$ ventres et $p + 1 = 4$ nœuds :



49. On calcule la tension T_0 pour les valeurs données par l'énoncé, on obtient :

$$T_0 = 4\mu L^2 f^2$$

$$T_0 = 4 * 50.10^{-3} * 0,49 * 10^4 \approx 10^{-1}.10^4 = 10^3$$

Cette tension s'obtiendrait par le poids d'une masse $m = T_0/g \approx 100kg$.

La comparaison de cette masse de 100 kg à la masse de la guitare incite à renforcer les fixations des cordes sur la guitare.