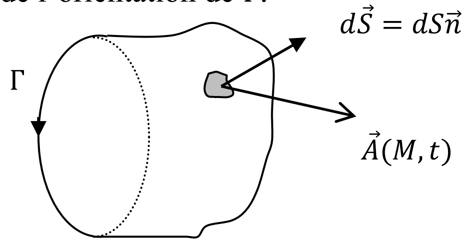
1) Flux d'un champ de vecteurs

Définitions

Le flux d'un champ de vecteurs intervient dans plusieurs domaines de la physique : électromagnétisme, conduction thermique, mécanique des fluides.

C'est une notion qui peut recouvrir des grandeurs physiques directement interprétable comme le débit massique d'un fluide en écoulement ou des grandeurs physiques plus difficilement accessible comme le flux d'un champ magnétique.

Soit $\vec{A}(M,t)$ un champ de vecteur et Γ un contour fermé orienté (arbitrairement). Soit S une surface ouverte délimitée par Γ. Soit M un point de S milieu d'une surface élémentaire (petite) dS. L'orientation du contour Γ permet de définir une orientation dans l'espace de la surface dS par le vecteur unitaire $\vec{n}$ qui est perpendiculaire à la surface dS. Le sens de $\vec{n}$ s'obtient par la règle de la main droite à partir de l'orientation de Γ.



Le flux élémentaire $d\Phi$ de $\vec{A}(M,t)$ à travers $d\vec{S}$ est définit par :

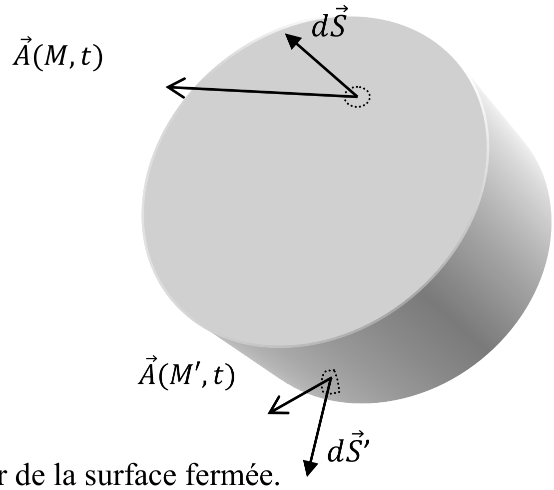
$$d\Phi = \vec{A}(M,t).d\vec{S}$$

Le flux de Φ de $\vec{A}(M,t)$ à travers S est définit par :

$$\Phi = \iint_{M\in S} \vec{A}(M,t).d\vec{S}$$

On généralise cette définition au cas d'une surface fermée. Une surface est fermée si elle délimite un volume. Une sphère est un exemple de surface fermée, le volume délimité par une sphère est une boule. Dans le cas d'une surface fermée, le flux de Φ de $\vec{A}(M,t)$ à travers S est définit par :

$$\Phi_S(\vec{A}) = \oiint_{M\in S} \vec{A}(M,t).d\vec{S}$$



Pour une surface S fermée, $d\vec{S}$ est orientée de l'intérieur vers l'extérieur de la surface fermée.

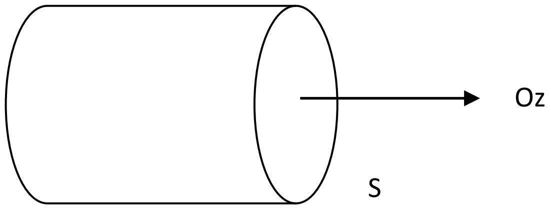
Exemples en physique

Débit massique.

On considère un fluide en écoulement dans un tuyau. Pour caractériser l'intensité de l'écoulement, on définit le débit massique D_m par l'équation suivante :

$$D_m = \frac{dm}{dt}$$

Où dm est la masse de fluide traversant une section S en entre les instants t et $t + dt$

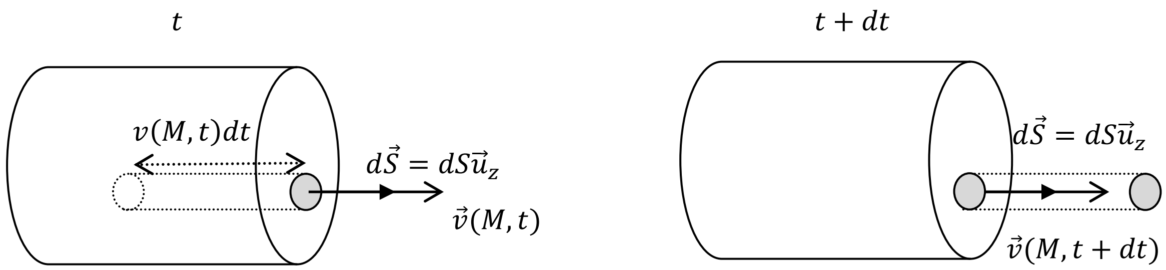


Le débit massique dépend du champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$ de l'écoulement. On montre que :

$$D_m = \iint_{M\in S} \vec{J}_m(M,t)\,.\,d\vec{S} = \Phi_S(\vec{J}_m)$$

Où $\vec{J}_m = \mu(M,t)\vec{v}(M,t)$ est le vecteur densité de flux massique, M est le milieu de la surface élémentaire dS, $\mu(M,t)$ est le champ scalaire de masse volumique du fluide et $\vec{v}(M,t)$ le champ vectoriel des vitesses de l'écoulement.

Montrons la relation précédente dans le cas ou le champ des vitesses s'écrit $\vec{v}(M,t) = v(M,t)\vec{u}_z$. Notons d^2m la masse de fluide traversant la surface élémentaire $dS\vec{u}_z$ entre les instants t et $t+dt$.



Entre les instants t et $t+dt$., le fluide parcourt la distance $dz = v(M,t)dt$. A l'instant t, la masse d^2m se trouve dans le cylindre de longueur $v(M,t)dt$ et de section dS donc de volume $d\tau = v(M,t)dtdS$ (cf figure de gauche ci-dessus). Par définition de ma masse volumique :

$$d^2m = \mu(M,t)d\tau = \mu(M,t)dv(M,t)dSdt = \mu(M,t)\vec{v}(M,t).\,d\vec{S}dt = \vec{J}_m(M,t).\,d\vec{S}dt$$

Par intégration sur la section S :

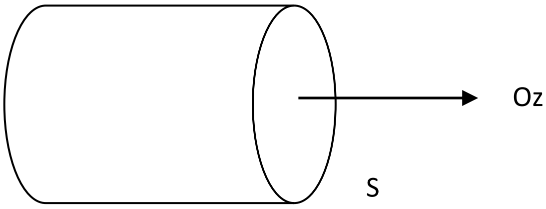
$$dm = \iint_{M\in S} d^2m = \iint_{M\in S} \vec{j}_m(M,t)\,.\,d\vec{S}\,dt \Leftrightarrow D_m = \frac{dm}{dt} = \iint_{M\in S} \vec{j}_m(M,t)\,.\,d\vec{S}$$

Autres quantités physiques définies par un flux.

- L'intensité I d'un courant électrique se définit par :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Où dq est la charge électrique traversant une section S en entre les instants t et $t+dt$



L'intensité I dépend du champ du champ des vitesses $\vec{v}(M,t)$ des charges mobiles selon la relation :

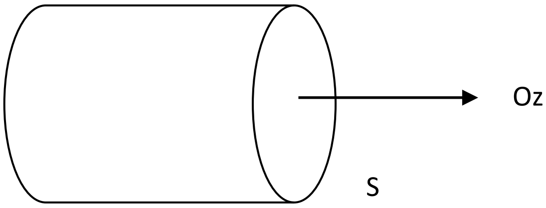
$$I = \iint_{M\in S} \vec{J}(M,t)\,.\,d\vec{S} = \Phi_S(\vec{J})$$

Où $\vec{j}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}(M,t)$ est le vecteur densité volumique de courant, M est le milieu de la surface élémentaire dS, $\rho(M,t)$ est le champ scalaire de la densité volumique des charges mobiles du milieu et $\vec{v}(M,t)$ le champ vectoriel des vitesses des charges mobiles du milieu.

- Le flux thermique ϕ se définit par :

$$\phi = \frac{\delta Q}{dt}$$

Où δQ est le transfert thermique à travers la section S réalisé entre les instants t et $t + dt$.



Rappel on définit également la densité de flux thermique φ par la relation : $\varphi = \frac{\phi}{S}$

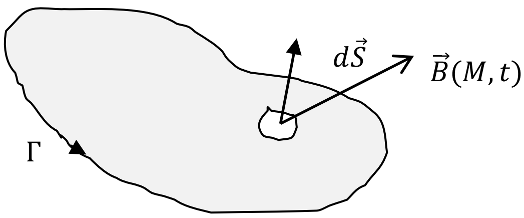
On montre que :

$$\phi = \iint_{M \in S} \vec{j}_{th}(M,t)\,.\,d\vec{S} = \Phi_S(\vec{j}_{th})$$

Où $\vec{j}_{th}$ est le vecteur densité de flux thermique, M est le milieu de la surface élémentaire dS. Si le milieu obéit à la loi *empirique* (loi vérifiée par l'expérience) de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda(M,t)\overrightarrow{grad}(T(M,t)$ où λ est la conductivité thermique du milieu.

- La force électromotrice d'induction e intervenant dans la loi de Faraday :

$$e = \iint_{M \in S} \vec{B}(M,t)\,.\,d\vec{S} = \Phi_S(\vec{B})$$



Où $\vec{B}(M,t)$ est le champ magnétique auquel est soumis le circuit, S est une surface s'appuyant sur le contour fermé orienté Γ du circuit dans l'approximation filiforme (on néglige la section du circuit devant sa longueur) et M est le milieu de la surface élémentaire dS.

On remarquera que le vecteur $d\vec{S}$ est orienté selon la règle de la main droite une fois orienté arbitrairement le contour Γ du circuit. Pour des raisons pratiques, on choisit l'orientation du courant électrique dans le même sens que l'orientation géométrique du contour Γ du circuit.

- Le théorème de Gauss, sous sa forme intégrale, fait intervenir le flux du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ selon la relation suivante, valable dans l'air, le vide ou un métal non magnétique :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_{M \in S} \vec{E}(M,t).\,d\vec{S} = \frac{Q_{intérieur à S}}{\varepsilon_0}$$

2) Opérateur divergence.

Introduction sur un exemple

La masse est une grandeur conservative en l'absence de processus nucléaire. Pour un système Σ fermé, cette propriété se traduit par :

$$\boxed{m_{\Sigma\text{fermé}} = constante}$$

Pour un système Σ ouvert, cette propriété se traduit par l'équation :

$$m_\Sigma(t+dt) = m_\Sigma(t) + dm_e - dm_s$$

Où dm_e est la masse entrant dans Σ et dm_s la asse sortant de Σ entre les instants t et $t+dt$.

En remarquant que :

$$\frac{m_\Sigma(t+dt) - m_\Sigma(t)}{dt} = \frac{dm_\Sigma(t)}{dt}$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\boxed{\frac{dm_{\Sigma\text{ouvert}}(t)}{dt} = \frac{dm_e}{dt} - \frac{dm_s}{dt} = D_{me} - D_{ms}}$$

Où D_{me} est le débit massique total entrant dans Σ et D_{ms} est le débit massique total sortant de Σ. En régime stationnaire la loi de conservation de la masse s'écrit :

$$D_{me} = D_{ms} \Leftrightarrow \sum_i D_{mei} = \sum_j D_{msj}$$

On notera l'analogie de cette relation avec la loi des nœuds en électricité.

La conservation de la masse pour un système ouvert se traduit donc par l'équation intégrale :

$$\frac{dm_\Sigma(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \mu(M,t)d\tau = D_{me} - D_{ms}$$

On montre que l'équation précédente s'exprimer sous forme locale (c'est-à-dire sous forme d'équation différentielle) sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial\mu(M,t)}{\partial t} + div(\vec{j}_m) = 0}$$

$\vec{j}_m$ été défini dans le paragraphe précédent. div est le symbole d'un opérateur différentiel nommé divergence. Cet opérateur différentiel s'applique à un vecteur $\overrightarrow{A}(M,t)$.

En coordonnées cartésiennes, la divergence d'un vecteur $\overrightarrow{A}(M,t) = A_x(M,t)\vec{u}_x + A_y(M,t)\vec{u}_y + A_z(M,t)\vec{u}_z$ s'écrit :

$$\boxed{div\left(\overrightarrow{A}(M,t)\right) = \frac{\partial A_x(M,t)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(M,t)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(M,t)}{\partial z}}$$

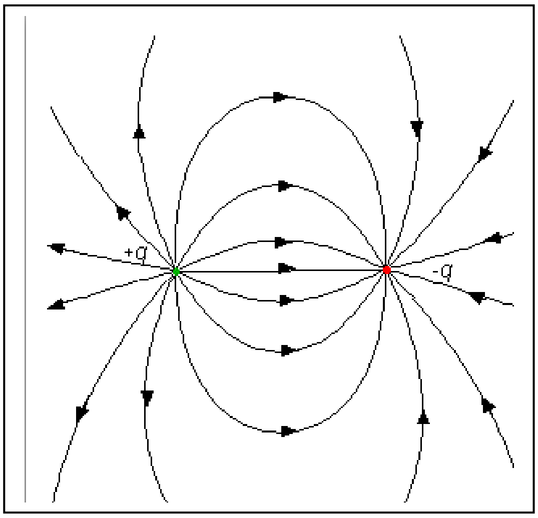
Des relations faisant intervenir l'opérateur divergence

- La loi locale de Maxwell Gauss :

$$div\left(\vec{E}(M)\right) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Une interprétation géométrique de l'opérateur divergence à propos de l'équation précédente est que les lignes de champ électrostatiques se coupent en les points où sont localisées des charges électriques ponctuelles.

Le schéma suivant représente quelques lignes de champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique (ensemble de deux charges ponctuelles opposées).



Les lignes de champ se coupent en les deux points ou sont localisés les charges. Les lignes de champ divergent (divergence positive) du point où est localisée la charge positive et convergent (divergence négative) vers le point où est localisée la charge négative.

L'opérateur divergence a été introduit par les physiciens pour la description du champ des vitesses des écoulements de fluide.

- La loi locale de Maxwell-flux

$$div\left(\vec{B}(M)\right) = 0$$

Une interprétation géométrique de l'opérateur divergence à propos de l'équation précédente est que les lignes de champ magnétiques ne se coupent pas. Nous verrons dans un des paragraphes suivants que les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées qui s'enroulent autour des sources du champ magnétique comme par exemple les circuits parcourus par un courant.

Une autre exploitation de l'équation précédente est de dire que $\vec{B}$ est un vecteur à flux conservatif. Pour comprendre cette dénomination, nous devons travailler l'expression précédente. L'intégration de la loi locale de Maxwell-flux sur une volume V donne l'équation intégrale de Maxwell-flux :

$$\iiint_{M\in V} div\left(\vec{B}(M)\right) d\tau = 0$$

Un théorème d'analyse vectorielle connu sous le nom de Green-Ostrogradski se traduit par la relation :

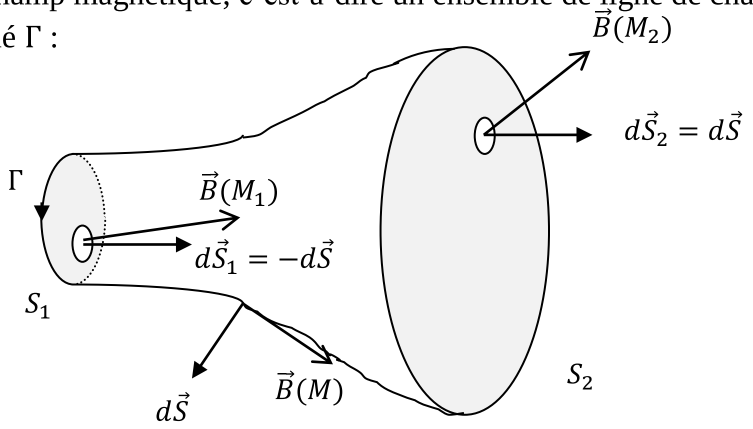
$$\iiint_{M\in V} div\left(\vec{A}(M)\right) d\tau = \oiint_{M\in S} \vec{A}(M).\, d\vec{S}$$

Dans cette relation S désigne la surface fermée délimitant le volume V et $d\vec{S}$ est perpendiculaire en M à la surface S et est orienté vers l'extérieur.

L'équation intégrale de Maxwell-flux s'écrit finalement :

$$\oiint_{M\in S} \vec{B}(M).\, d\vec{S} = 0$$

Considérons alors un tube de champ magnétique, c'est-à-dire un ensemble de ligne de champ magnétique s'appuyant sur un contour fermé Γ :



En raisonnant sur la surface S fermée constituée des surfaces S_1, S_2 et de la surface latérale SL du tube de champ, on obtient en appliquant

$$\oiint_{M\in S} \vec{B}(M).d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \iint_{M_1\in S_1} \vec{B}(M_1).d\vec{S} + \iint_{M_2\in S_2} \vec{B}(M_2).d\vec{S} + \iint_{M\in SL} \vec{B}(M).d\vec{S} = 0$$

La surface latérale est constituée de ligne de champ magnétique pour lesquelles $\vec{B}(M)$ est un vecteur tangent donc $\vec{B}(M).d\vec{S} = 0$ puisque $d\vec{S}$ est perpendiculaire à la surface.

En tenant compte de l'orientation de $d\vec{S}$ vers l'extérieur de la surface fermée on obtient :

$$\iint_{M_1\in S_1} \vec{B}(M_1).d\vec{S}_1 = \iint_{M_2\in S_2} \vec{B}(M_2).d\vec{S}_2 \Leftrightarrow \Phi_{S_1}(\vec{B}) = \Phi_{S_2}(\vec{B})$$

Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface ouverte se conserve le long d'un tube de champ. C'est le sens de la phrase $\vec{B}$ est un vecteur à flux conservatif.

- La loi locale de conservation de la matière :

$$\frac{\partial\mu(M,t)}{\partial t} + div(\vec{j}_m) = 0$$

En régime stationnaire $\frac{\partial\mu(M,t)}{\partial t} = 0$ et :

$$div(\vec{j}_m) = 0$$

En régime stationnaire, $\vec{j}_m$ est un vecteur à flux conservatif. En reprenant le schéma précédent on a :

$$\Phi_{S_1}(\vec{j}_m) = \Phi_{S_2}(\vec{j}_m)$$

Cette relation traduit la conservation du débit massique à savoir :

$$D_{m1} = D_{m2} \text{ ou } \sum_i D_{mei} = \sum_i D_{msj}$$

La première relation traduit la conservation du débit massique le long d'une canalisation et l'autre relation traduit la loi des nœuds pour l'hydrodynamique.

Toutes les propriétés évoquées précédemment s'appliquent au vecteur $\vec{j}$ densité de courant en électricité puisque $\vec{j}$ intervient dans la loi locale de conservation de la charge électrique :

$$\frac{\partial\rho(M,t)}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0$$