1) Fonctions de plusieurs variables

Exemples en phyique

Le plus souvent une grandeur physique dépend d'autres grandeurs physiques variables et de paramètres (grandeurs physiques dont la valeur est fixée dans un contexte d'étude donné).

La pression P d'un gaz vérifiant le modèle du gaz parfait dépend de la température absolue T, du volume occupé V et de la quantité de matière n :

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Le potentiel électrique $V(x,y,z)$ crée par deux charges ponctuelles fixes dépend des variables x,y et z et des paramètres constituées des charges électriques q_1 et q_2 et de leurs positions (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2)

$$V(x,y,z) = \frac{Kq_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} + \frac{Kq_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}$$

La température $T(x,t)$ d'un solide homogène dans un problème unidimensionnel de conduction thermique dépend des variables de position x et de temps t.

Représentation graphique

Soit $f(x,y)$ une fonction réelle de deux variables x et y. La représentation graphique de l'ensemble des points (x,y,z) vérifiant l'équation $z = f(x,y)$ est une surface (une nappe en mathématique).

Exemple en physique

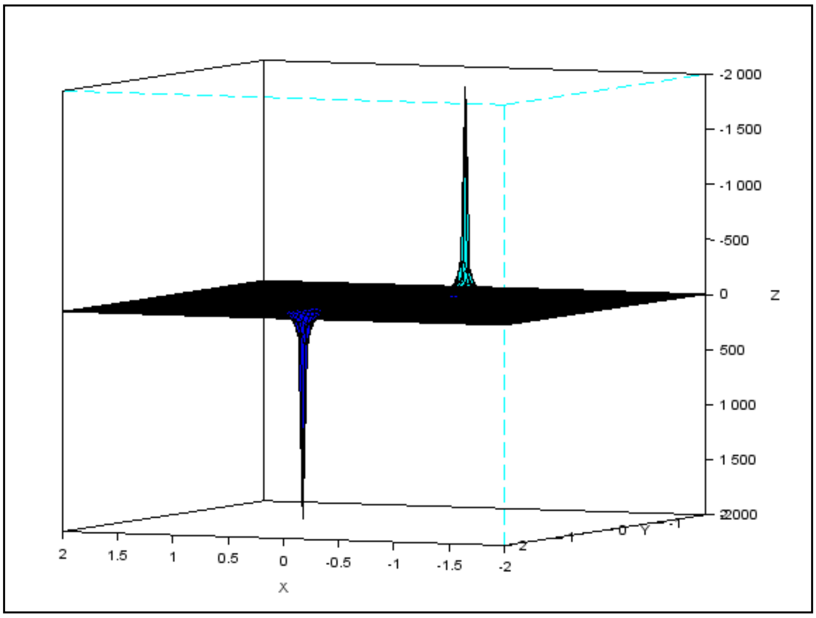
Deux charges ponctuelles identiques $e = 1{,}6.10^{-19}C$ placées aux points $(1{,}10)$ et $(-1,-10)$ (en 10^{-10} m) créent en un point M$(x,y,0)$(x et y en 10^{-10} m) du plan Oxy un potentiel électrostatique $V(x,y,0)$ en V :

$$V(x,y,0) = 14\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}\right)$$

On a pris $Ke \approx 910^9 . 1{,}6 . 10^{-19} V.m/10^{-10}m \approx 14V$ avec x et y adimensionné.

Avec le programme Scilab ci-dessous ,on obtient la représentation dans laquelle la cote est le potentiel électrostatique $V(x,y,0)$ en Volt d'un point $M(x,y,0)$.

```
Function V=f(x, y)
   V=14*(1/sqrt((x-0.5)^2+(y-0.5)^2)-1/sqrt((x+0.5)^2 + (y+0.5)^2))
endfunction
x=linspace(-2,2,100), y=x
V=feval(x,y,f)
plot3d(x,y,V)
```



Champ scalaire et champ vectoriel

Un cas particulier de grandeur physique dépendant des variables t et espace est constitué par les champs scalaire et vectoriels.

Lorsque qu'une grandeur physique scalaire G dépend du temps t et des coordonnées x, y et z d'un point M de l'espace on qualifie G de champ scalaire.

Le potentiel électrique $V(x,y,z,t)$, la température $T(x,y,z,t)$, la densité volumique de charge $\rho(x,y,z,t)$ou a masse volumique $\mu(x,y,z,t)$sont des exemples de champs scalaires.

Le champ scalaire G est dit uniforme s'il ne dépend pas du point M d'observation.

Le champ scalaire G est dit stationnaire s'il ne dépend pas du temps : $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$.

Lorsque qu'une grandeur physique vectorielle $\vec{G}$ dépend du temps t et des coordonnées x, y et z d'un point M de l'espace on qualifie $\vec{G}$ de champ scalaire.

Le champ électrique $\vec{E}(x,y,z,t)$, la densité volumique de courant $\vec{j_Q}(x,y,z,t)$, la vitesse d'écoulement d'un fluide $\vec{v}(x,y,z,t)$ sont des exemples de champ vectoriel.

Le champ vectoriel $\vec{G}$ est dit uniforme s'il ne dépend pas du point M d'observation.

Le champ scalaire $\vec{G}$ est dit stationnaire s'il ne dépend pas du temps : $\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = 0$.

Dérivées partielles d'ordre un.

Soit $f(x,y)$ une fonction réelle de deux variables x et y.

Sous réserve d'existence f admet :

- Une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x notée $\frac{\partial f}{\partial x}$
- Une dérivé partielle d'ordre 2 par rapport à y notée $\frac{\partial f}{\partial y}$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ on considère y comme une constante et on utilise les règles de dérivation d'une fonction d'une variable. Exemples mathématiques :

$f(x,y) = x^2y^3 + x^3 - 2y$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - 2\frac{\partial}{\partial x}y = y^3\frac{\partial}{\partial x}x^2 + 3x^2 + 0 = 2xy^3 + 3x^2$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(x^3) - 2\frac{\partial}{\partial y}y = x^2\frac{\partial}{\partial x}y^3 + 0 - 2 = 3x^2y^2 - 2$

$f(x,y) = e^{x^2+y^3}$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^3)e^{x^2+y^3} = 2xe^{x^2+y^3}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^3)e^{x^2+y^3} = 3y^2e^{x^2+y^3}$

$f(x,y) = \ln(x^2y^4 + x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^4+x)}{x^2y^4+x} = \frac{2xy^4+1}{x^2y^4+x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4+x)}{x^2y^4+x} = \frac{4x^2y^3}{x^2y^4+x}$$

Exemples en physique :

$P = \frac{nRT}{V}$

- $\frac{\partial P}{\partial V} = nRT\frac{\partial}{\partial V}\frac{1}{V} = -nRT\frac{1}{V^2} = -\frac{P}{V}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}\frac{\partial}{\partial T}T = \frac{nR}{V} = \frac{P}{T}$

$V(x,y,z) = \frac{Kq_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kq_1\frac{\partial}{\partial x}((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kq_1\left(-\frac{1}{2}\right)((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{-\frac{1}{2}-1}\frac{\partial}{\partial x}((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kq_1\left(-\frac{1}{2}\right)((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{-\frac{3}{2}}2(x-x_1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Kq_1(x-x_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Par symétrie :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{Kq_1(y-y_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Kq_1(z-z_1)}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Application : le vecteur gradient

Soit $f(x,y,z,t)$ un champ scalaire. Le vecteur gradient de f, noté $\overrightarrow{grad}(f(x,y,z,t))$ est un champ vectoriel défini par l'équation :

$$\overrightarrow{grad}\big(f(x,y,z,t)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

Propriétés du gradient d'un champ scalaire stationnaire $f(x,y,z)$:

- $\overrightarrow{grad}\big(f(x,y,z)\big)$ est orienté dans le sens des $f(x,y,z,)$ croissant.
- $\overrightarrow{grad}\big(f(x,y,z)\big)$ est un vecteur perpendiculaire aux surfaces équi-f d'équation $f(x,y,z) = constante$
- En coordonnées cartésiennes :

$$df = \overrightarrow{grad}\big(f(x,y,z)\big).d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

- De la relation précédente on a : $\int_{A\longrightarrow B}\overrightarrow{grad}\big(f(x,y,z)\big).d\overrightarrow{OM} = \int_A^B df(M) = f(B)-f(A)$
- A une dimension, par exemple z, la relation $\overrightarrow{grad}\big(f(x,y,z)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$ s'écrit :

$$\overrightarrow{grad}\big(f(z)\big) = \frac{df}{dz}\vec{u}_z$$

Dans la suite on identifie un point M de l'espace à ses coordonnées x, y et z : $M = (x,y,z)$.
Exemples de relations en physique faisant intervenir un gradient :

1. Une force conservative est une force dont le travail entre deux points A et B ne dépend pas de la trajectoire de son point d'application qui évolue du point A vers le point B. On montre qu'une force $\vec{F}(x,y,z)$est conservative ssi il existe une fonction énergie potentielle $E_p(x,y,z)$ vérifiant

$$\vec{F}(x,y,z) = -\overrightarrow{grad}\left(E_p(x,y,z)\right)$$

On a alors :

$$W_{A\longrightarrow B}^{\vec{F}} = \int_{A\longrightarrow B} -\overrightarrow{grad}\left(E_p(M)\right).d\overrightarrow{OM} = -\int_A^B dE_p(M) = E_p(A) - E_p(B)$$

Le travail d'une force conservative $\vec{F}(M)$ ne dépend que des coordonnées des points de départ et d'arrivée et non pas de la trajectoire suivi par le point M d'application de la force $\vec{F}$.

Le plus souvent on se place dans un cadre unidimensionel, par exemple z, alors pour $\vec{F}(z) = F_z(z)\vec{u}_z$

$$\vec{F}(z) = -\overrightarrow{grad}\left(E_p(z)\right) = -\frac{dE_p}{dz}\vec{u}_z \Leftrightarrow E_p(z) = -\int F_z(z)dz$$

Le travail du poids $\vec{P}(M) = -mg\vec{u}_z$,l’ **axe Oz étant vertical ascendant**, d’une masse dont le centre de gravité M évolue de A à B s’écrit :

$$W_{A\to B}^{\vec{F}} = E_p(A) - E_p(B) = mgz_A - mgz_B$$

2. Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est relié au potentiel électrostatique par la relation :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\big(V(M)\big)$$

Compte tenu des propriétés du gradient, le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants.

Les lignes de champ électrique, courbes admettant en chacun de ses points M, le vecteur $\vec{E}(M)$comme vecteur tangent sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles, surfaces d’équation $V(M) = constante$.

3. La loi empirique de Fourier relie la densité de flux thermique $\vec{j}_Q(x,y,z,t)$ au champ de température $T(x,y,z,t)$:

$$\vec{j}_Q(x,y,z,t) = -\lambda\overrightarrow{grad}\big(T(x,y,z,t)\big)$$

où λ est la conductivité thermique du milieu.

4. La loi locale d’Ohm relie la densité volumique $\vec{j}(x,y,z,t)$de courant au potentiel $V(x,y,z)$ dans un milieu conducteur :

$$\vec{j}(x,y,z) = \sigma\vec{E}(x,y,z) = -\sigma\overrightarrow{grad}\big(V(x,y,z)\big)$$

où σ est la conductivité électrique du milieu.

On notera l’analogie entre les deux lois précédentes. L’analogie entre les conductivités thermique et électriques, entre le potentiel électrique et la température, entre la densité de flux thermique et la densité de courant.

La loi dOhm intégrale $V_1 - V_2 = RI$ aura pour analogue en régime stationnaire la loi $T_1 - T_2 = R_{th}\Phi$ (cf TD thermique).

Une différence de potentiel crée dans un milieu conducteur un courant qui s’écoule dans le sens des potentiels décroissant. Une différence de température crée dans un milieu conducteur un flux thermique qui se diffuse dans le sens des températures décroissantes.

Dérivées partielles d’ordre deux.

Soit $f(x,t)$ un champ scalaire unidimensionnel. Sous réserve d’existence, f admet des dérivées partielles d’ordre deux :

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)\ et\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

Indiquons que sous certaines conditions (f de classe C^2 sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$) les dérivées croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}$ sont égales. Dans le cadre des modèles du programme de physique ces conditions de régularité de f sont réunies.

Les dérivées partielles d’ordre deux interviennent en physique dans le cadre de l’équation de propagation des ondes mécaniques ou des ondes électromagnétiques, dans le cadre de l’équation de diffusion de la chaleur.

Dans un modèle unidimensionnel en l’absence de phénomène dissipatif, l’équation de propagation des ondes sur une corde vibrante pour des petits mouvements selon la verticale Oy et en se plaçant dans des conditions expérimentales ou on peut négliger l’action de la pesanteur on obtient :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Dans un modèle unidimensionnel en l’absence de phénomène de création ou d’absorption de chaleur, la température $T(x,t)$ vérifie l’équation de diffusion de la chaleur :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$