Les exemples d'application décrits dans ce document et les connaissances données sont à comprendre par cœur.

1) Primitives et dérivées usuelles

Fonction	Une primitive	Fonction	dérivée
$\mathbf{x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}}$	$\mathbf{a\,\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$	$\mathbf{x^{\alpha}}$	$\mathbf{\alpha x^{\alpha-1}}$
$\mathbf{\frac{1}{x}}$	$\mathbf{\ln(\lvert x\rvert)}$	$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{\frac{-1}{x^2}}$
$\mathbf{e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}^*}$	$\mathbf{\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}}$	$\mathbf{e^{\alpha x}}$	$\mathbf{\alpha e^{\alpha x}}$
$\mathbf{u'(x)u^{\alpha}(x), \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}}$	$\mathbf{\frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}}$	$\mathbf{u^{\alpha}(x)}$ **Par exemple** $\boldsymbol{\sqrt{u(x)} = u(x)^{1/2}}$	$\mathbf{\alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)}$ **Par exemple** $\boldsymbol{\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$
$\mathbf{\frac{u'(x)}{u(x)}}$	$\mathbf{\ln(\lvert u(x)\rvert)}$	$\mathbf{\frac{u(x)}{v(x)}}$	$\boldsymbol{\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}}$
$\mathbf{u'(x)e^{u(x)}}$	$\mathbf{e^{u(x)}}$	$\mathbf{e^{u(x)}}$	$\mathbf{u'(x)e^{u(x)}}$
ln(x)	**xln(x)-x**	$\boldsymbol{ln(u(x))}$	$\boldsymbol{\frac{u'(x)}{u(x)}}$
$\boldsymbol{sin(ax+b), a \in \mathbb{R}^*}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{a}cos(ax+b)}$	$\boldsymbol{sin(ax+b)}$	$\boldsymbol{acos(ax+b)}$
$\boldsymbol{cos(ax+b),}$ $\mathbf{a \in \mathbb{R}^*}$	$\boldsymbol{\frac{1}{a}sin(ax+b)}$	$\boldsymbol{cos(ax+b)}$	$\boldsymbol{-asin(ax+b)}$

Application déterminer le sens de variation et le signe de la fonction g : $x \mapsto \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ donc g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, g est minimum en $x = 1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad g(x) \geq g(1) = 0$$

Application en physique.

On considère un point mobile M sur un axe Ox. On repère en coordonnées cartésienne par $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x}$.

La vitesse instantanée $\vec{v}$ de M est définie par $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. En notant $\vec{v} = v_x\overrightarrow{u_x}$ on obtient les relations :

$$\boxed{v_x(t) = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)dt}$$

L'accélération instantanée $\vec{a}$ de M est définie par $\vec{a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. En notant $\vec{a} = a_x\overrightarrow{u_x}$ on obtient les relations :

$$\boxed{a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \Leftrightarrow v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t)dt}$$

Une force $\vec{F} = F(x)\overrightarrow{u_x}$ est une force conservative dont l'énergie potentielle associée s'écrit $\boxed{E_p(x) = -\int F(x)dx}$

L'énergie potentielle est définie donc à une constante additive près (Seule une différence d'énergie potentielle se mesure).

Inversement, connaissant l'énergie potentielle d'une interaction, on calcule la force d'interaction par la relation :

$$\boxed{F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \Leftrightarrow E_p(x) = -\int F(x)dx + constante}$$

L'énergie potentielle d'interaction électrique entre les deux atomes d'une molécule diatomique est bien modélisée par l'expression $E_p(x) = \frac{A}{x^6} - \frac{B}{x^{12}}$. La force d'interaction s'écrit : $F(x) = -\frac{6A}{x^7} + \frac{12B}{x^{13}}$.

2) **Equation différentielle linéaire du premier ordre :** $y'(t) + ay(t) = 0$

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction y de la variable t. En physique y désigne une grandeur physique quelconque (position, énergie, tension, intensité de courant) et t désigne généralement le temps.
Soit à résoudre l'équation :$y'(t) + ay(t) = 0$ où a est un paramètre indépendant de t.

La solution de cette équation s'écrit :

$$y(t) = Ae^{-at}$$

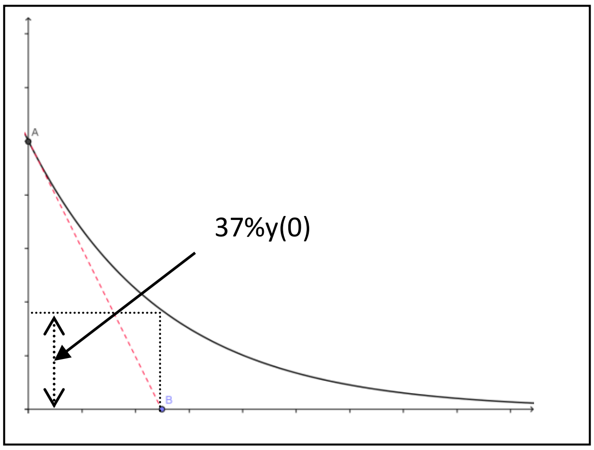
La constante d'intégration A se calcule à partir de la quantité $y(0)$ indiquée dans l'énoncé ou résultant d'une propriété de la grandeur physique y (l'intensité d'un courant parcourant une inductance est une fonction continue du temps, de même la tension aux bornes d'un condensateur).

$$y(t) = y(0)e^{-at}$$

Si a est négatif la solution $y(t)$ diverge. Soit il s'agit d'une impossibilité physique soit la modélisation réalisée suppose que y(t) soit faible devant une grandeur caractéristique du milieu de même dimension. Dans ce dernier cas le modèle ne permet de décrire que le début de l'évolution temporelle de y.
Si a est positif la solution $y(t)$ ne diverge pas. On pose $a = 1/\tau$ où τ est dénommée constante de temps (en s !).

$$y(t) = y(0)e^{-t/\tau}$$

La représentation graphique de $y(t) = y(0)e^{-t/\tau}$ est donnée ci-dessous. La droite AB est la tangente à l'origine de la courbe. Le point B, point d'intersection de la pente à l'origine avec l'axe des temps a pour abscisse τ.

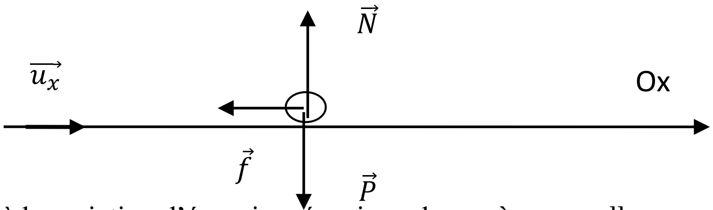


y s'annule au bout d'un temps théorique infini. En pratique, compte tenu de la précision finie des instruments de mesure, le temps du régime transitoire est finit. La durée du régime transitoire est généralement évaluée à 5τ (cf. paragraphe 3).

La constante de temps est qu'elle permet de quantifier la durée du régime transitoire.

Applications en physique.

Un mobile, de masse m, est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\overrightarrow{u_x}$ sur un support horizontal ox. Le mobile est soumis à la seule force horizontale $\vec{f} = -h\vec{v}$ (force de frottement fluide) et aux forces verticales $\vec{P}$ (Poids de l'objet) et $\vec{N}$ (réaction normale du support).



Les forces verticales ne contribuent pas à la variation d'énergie mécanique du système car elles sont perpendiculaire au mouvement.

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) = P_{\vec{f}} = \vec{f}.\vec{v} = -hv_v^2$ soit $mv_x\frac{dv_x}{dt} = -hv_xv_x \Leftrightarrow v_x'(t) + \frac{h}{m}v_x(t) = 0$

Une autre façon d'obtenir l'équation du mouvement est d'utiliser la seconde loi de Newton (cf partie mécanique II).

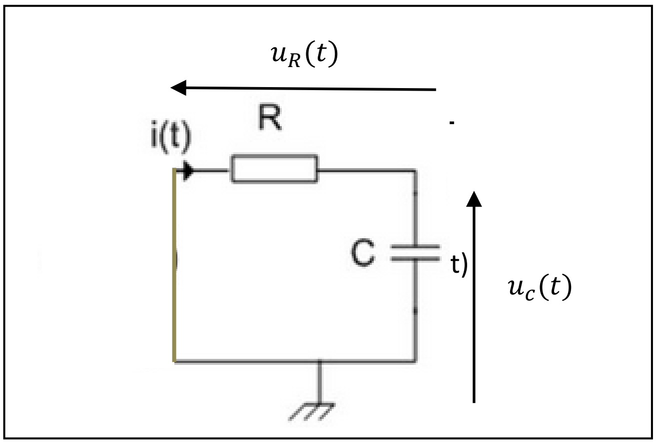
L'application de la relation fondamentale de la dynamique (cf cours de mécanique seconde partie) au mobile dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, permet d'obtenir l'équation :

$$m\frac{dv_x}{dt} = -hv_x \Leftrightarrow v_x'(t) + \frac{h}{m}v_x(t) = 0$$

La solution s'écrit :$v_x(t) = v_x(0)e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{m}{h}$.

Un condensateur de capacité C, initialement chargé ($u_c(t) = u_0$) est relié à une résistance R à l'instant initial.

On se place en convention récepteur pour laquelle les flèches des tensions sont en sens inverse du sens positif (choisi arbitrairement) du courant.



La loi des mailles permet d'écrire : $u_R + u_c = 0$.

Pour une résistance s'écrit $\boxed{u_R = Ri}$ (Loi d'Ohm)

Pour un condensateur : $\boxed{u_c = \frac{Q}{C}}$ et par définition de l'intensité $\boxed{i = \frac{dQ}{dt}}$

On en déduit que $\boxed{i = Cu_c'(t)}$

Nous obtenons : $u_c'(t) + \frac{1}{\tau}u_c(t) = 0$ avec $\boxed{\tau = RC}$.

La solution s'écrit : $u_c(t) = u_0e^{-t/\tau}$.

3) **Equation différentielle linéaire du premier ordre :** $y'(t) + ay(t) = b$ (a strictement positif).

Soit à résoudre l'équation : $y'(t) + ay(t) = b$ où a et b sont des paramètres indépendants de t. La solution générale de cette équation est la somme de deux termes :

$$y(t) = y_{SSM}(t) + y_{SP}(t)$$

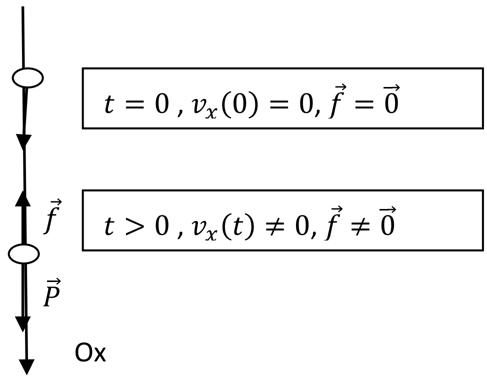
- $y_{SSM}(t)$ solution générale de l'équation Sans Second Membre $y'(t) + ay(t) = 0$ donc $y_{SSM}(t) = Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = 1/a$
- $y_{SP}(t)$ une solution particulière de l'équation. Lorsque a et b sont des paramètres indépendants de t, on a $y_{SP}(t) = b/a$

La solution générale s'écrit $y(t) = Ae^{-t/\tau} + b/a$. La constante A se détermine par la condition initiale $y(0) = y_0$.

Remarquons que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = b/a$. On parle alors de valeur limite pour $y(t)$ que l'on note $y_\infty = b/a$. Physiquement y_∞ est la valeur de y(t) obtenue après le régime transitoire d'une durée approximative de 5τ (précision de 1%)

Application en physique.

On lâche sans vitesse initiale un mobile soumis à son poids et à une force de frottement (force non conservative) que l'on **modélise** par l'expression $\vec{f} = -h\vec{v}$.

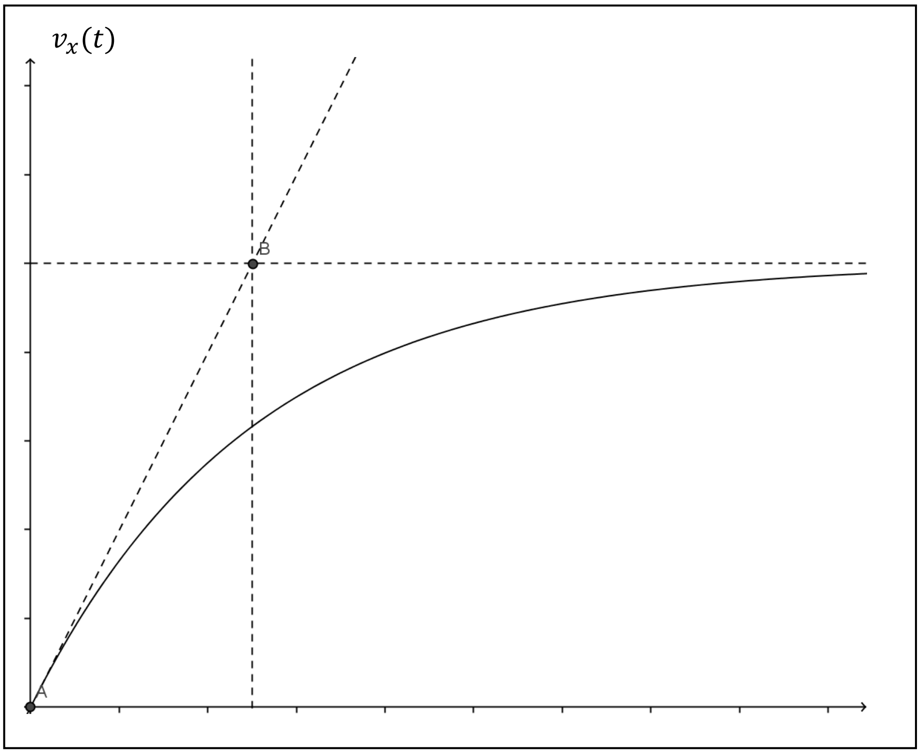


L'application de la relation fondamentale de la dynamique (cf cours de mécanique seconde partie) au mobile dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, permet d'obtenir l'équation :

$$m\frac{dv_x}{dt} = -hv_x + mg \Leftrightarrow v_x'(t) + \frac{h}{m}v_x(t) = +g$$

La solution finale s'écrit : $v_x(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\tau = \frac{m}{h}$ été $v_\infty = g\tau$

Remarquer les éléments du graphique.



Supposons qu'on utilise capteur de vitesse de précision 1% .

Ainsi lorsque $\left|\frac{v_x(t)-v_\infty}{v_\infty}\right| \leq 0{,}01$ le capteur donnera une valeur constante.

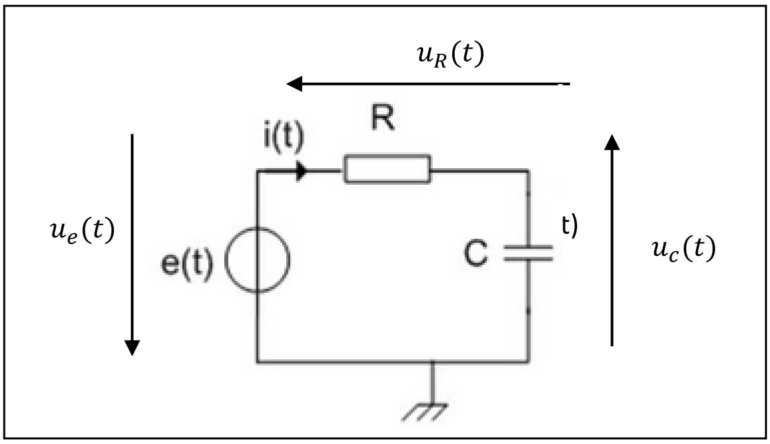
Déterminons l'instant t pour lequel $\left|\frac{v_x(t)-v_\infty}{v_\infty}\right| = 0{,}01$ soit :

$\left|-e^{-\frac{t}{\tau}}\right| = 0{,}01 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln(0{,}01) \Leftrightarrow t = -\ln(0{,}01)\tau.$

Numériquement $-\ln(0{,}01) = -\ln(10^{-2}) = 2\ln(10) \approx 4{,}6$ qu'on arrondi à 5. Pour une précision de l'ordre de 1 % on considère que la durée du régime transitoire est de l'ordre de 5τ.

Un condensateur, de capacité C et initialement déchargé ($u_c(t) = 0$), est relié à une résistance R et un générateur de tension $e(t) = E$ à l'instant initial.

On se place en convention récepteur pour laquelle les flèches des tensions aux bornes des dipôles sont en sens inverse du sens positif (choisi arbitrairement) du courant.



La loi des mailles permet d'écrire : $u_R + u_c - e = 0$

En convention récepteur $\boxed{u_e = -e(t)}$

On obtient pour la tension $u_c(t)$:

$$u_c'(t) + \frac{1}{\tau}u_c(t) = \frac{E}{\tau}$$

La solution finale s'écrit :

$u_c(t) = u_{c\infty}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\tau = RC$ et $u_{c\infty} = E$.

4) Equation différentielle du second ordre : $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$.

Le modèle qui permet de décrire la dynamique d'un système (mécanique, électrique, chimique,….) par cette équation est nommé modèle de **l'oscillateur harmonique**. C'est en particulier un modèle satisfaisant lorsqu'on étudie les oscillations d'un système mécanique « au voisinage » d'une position d'équilibre y_e stable.

La solution de l'équation peut s'écrire de deux manières :

$$y(t) = Acos(\omega_0 t) + Bsin(\omega_0 t)\ ou\ \ y(t) = Ccos(\omega_0 t + \phi)$$

$A\ et\ B$ sont deux constantes qu'on déterminer à partir des conditions initiales $y(0) et\ y'(0)$ données par l'énoncé.
$C\ et\ \phi$ sont deux constantes qu'on déterminer à partir des conditions initiales $y(0) et\ y'(0)$ données par l'énoncé.

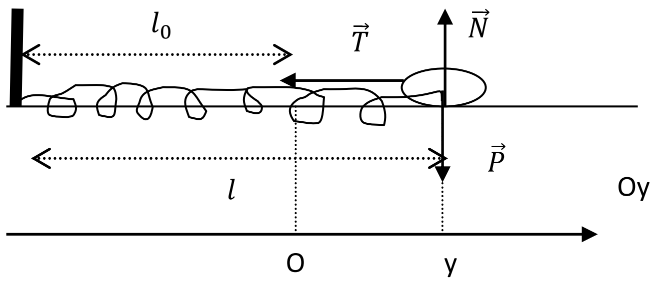
ω_0 est nommé pulsation propre et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ est la période propre.

En utilisant la formule bien connue (!) : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ vous montrerez que (A non nul) :

$$A = Ccos(\phi)\ et\ B = -Csin(\phi)\ \ ;\ C^2 = A^2 + B^2\ et \tan(\phi) = -\frac{B}{A}$$

Application en physique :

On considère un système masse ressort horizontal pour lequel une masse m glisse sans frottement sur un axe horizontal.



En l'absence de frottement et de force dépendant explicitement du temps, le système est conservatif. Le théorème de l'énergie mécanique $\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F}_{NC}} P_{\vec{F}_{NC}} = 0$ permet d'affirmer que l'énergie mécanique est conservée : $E_m = E_{m_0}$.

Les forces verticales $\vec{P}$ et $\vec{N}$ ne contribuent pas à la variation d'énergie du système puisque ces forces sont perpendiculaires au mouvement horizontal. La seule énergie potentielle à prendre en compte est l'énergie potentielle élastique.

Comme la tension du ressort s'écrit **ici** $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_y = -kx\vec{u}_y$ car $l - l_0 = |y| = y$ on a $E_p = -\int -kydy = \frac{1}{2}ky^2$.

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}ky^2\right) = 0 \Leftrightarrow mv_y\frac{dv_y}{dt} + ky\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow m\frac{dv_y}{dt} + ky = 0 \Leftrightarrow y''(t) + \frac{k}{m}y = 0$$

En posant $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$ on reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique.

Si on néglige la résistance des fils de connection et de la bobine de coefficient d'inductance L, un circuit série LC conduit à l'équation suivante pour la tension $U_c(t)$ aux bornes du condensateur :

$$U_c''(t) + \frac{1}{LC}U_c = 0$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique en posant $\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$

En convention récepteur la tension aux bornes d'une bobine de résistance r et d'inductance L s'écrit $U_L = ri + L\frac{di}{dt}$.

Le lecteur avertit pourra avec profit démontrer l'équation $U_c''(t) + \frac{1}{LC}U_c = 0$.

Remarque

a) Pour résoudre une équation du type :

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_e$$

On écrit que la solution générale s'écrit :

$$y(t) = y_{SSM}(t) + y_{SP}(t)$$

- $y_{SSM}(t)$ est solution générale de l'équation Sans Second Membre : $y''(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$ à savoir :

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \ ou \ \ y(t) = C\cos(\omega_0 t + \phi)$$

- $y_{SP}(t)$ est une solution particulière de l'équation, à savoir $y_{SP}(t) = y_e$.

On obtient alors :

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + y_e$$

Les constantes $A \ et \ B$ se calculent à partir des conditions initiales $y(0) et \ y'(0)$ données par l'énoncé.

5) Equation différentielle du second ordre : $y''(t) + \frac{\omega_0}{Q} y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$

L'expérience, cf TP, montre que l'amplitude du mouvement d'un oscillateur décroit : on dit que l'oscillateur est amortie. Pour rendre compte de cet amortissement on suppose que le système masse ressort subit en plus une force de frottement fluide du type $\vec{F} = -f\vec{v} = -fy'(t)\vec{u}_y$. L'expérience montre que ce modèle est souvent satisfaisant en l'absence de frottement solide et pour des vitesses « faibles » de l'oscillateur.

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}ky^2\right) = P_{\vec{F}} = \vec{F}.\vec{v} = -hv^2 = -hy'^2$

Après une phase de calcul, l'équation du mouvement devient : $y''(t) + \frac{f}{m}y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0.$

On pose $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{f}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. $\boxed{Q = \frac{m\omega_0}{f}}$ est le facteur de qualité du système. L'équation s'écrit sous forme **canonique** :

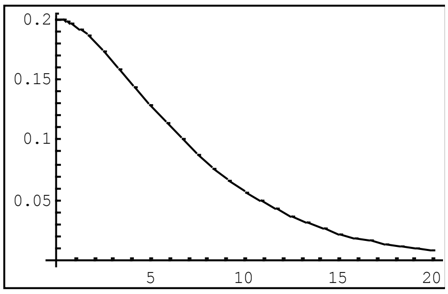
$$y''(t) + \frac{\omega_0}{Q}y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

La résolution de l'équation précédente dépend des solutions de l'équation du second degré appelée équation caractéristiques qui s'écrit :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

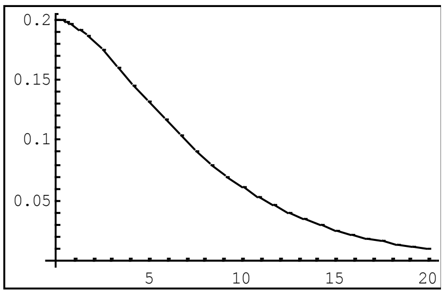
Nous admettrons les résultats suivants, en notant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$le discriminant.

régime apériodique $\Delta > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Q} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow f > 2m\omega_0$: l'amortissement est fort.



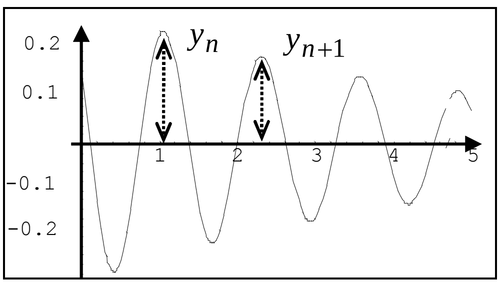
L'équation admet deux racines réelles négatives r_1 et r_2.
La solution de l'équation s'écrit $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$où A, B sont deux constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales.
La courbe $y(t)$se présente ci-contre ($y(0) = 0.2SI$ et $y'(0) = 0$).

régime critique $\Delta = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Q} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f = 2m\omega_0$: l'amortissement est critique.



L'équation admet une racine réelle négative$r_1 = -\omega_0$. La solution de l'équation s'écrit $y(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$ où A, B sont deux constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales.
La courbe $y(t)$se présente ci-contre ($y(0) = 0.2SI$ et $y'(0) = 0$).

régime pseudo-périodique $\Delta < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Q} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow f < 2m\omega_0$: l'amortissement est faible.



L'équation admet deux racines complexe :

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La solution de l'équation s'écrit : $y(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}cos(\omega t + \phi)$

où A, ϕ sont deux constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales et $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ est la pseudo-pulsation. On note $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ la pseudo-période.

LA décroissance de l'amplitude $Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ du signal $y(t)$ est caractérisée par le **décrément logarithmique** δ :

$$\delta = \ln(\frac{y(t)}{y(t+T)})$$

En pratique il est aisé de repérer sur un enregistrement la position des maximums (par exemple) de y(t) . En pratique on utilise la relation suivante :

$$\delta = \ln(\frac{y_n}{y_{n+1}})$$

$y_n\ et\ y_{n+1}$ sont des amplitudes maximales successives du signal.

On montre que $\boxed{\delta = \alpha T}$.

Remarques

b) On peut aussi noter la solution ainsi : $y(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(Acos(\omega t) + Bsin((\omega t))$
c) Pour résoudre une équation du type :

$$y''(t) + \frac{\omega_0}{Q}y'(t) + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_e$$

On écrit que la solution générale s'écrit :

$$y(t) = y_{SSM}(t) + y_{SP}(t)$$

- Avec $y_{SSM}(t)$ solution générale de l'équation Sans Second Membre
$$y''(t) + \frac{\omega_0}{Q}y'(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$
- $y_{SP}(t)$ une solution particulière de l'équation, a savoir $y_{SP}(t) = y_e$.

Pour un régime pseudopériodique, par exemple, on obtiendra donc :

$$y(t) = Ae^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}cos(\omega t + \phi) + y_e$$

$A\ et\ \phi$ sont deux constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales $y(0) et\ y'(0)$ données par l'énoncé.

Oscillateur entretenue

Définition

Un oscillateur entretenu est un oscillateur amorti qui subit en plus une force sinusoïdale du type $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos(\omega t)$.

L'équation du mouvement devient alors, en prenant l'exemple du ressort : $\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} + f\frac{dz}{dt} + kz = F_0\cos(\omega t)}$.

On peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + 2\alpha\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

La solution de cette équation s'écrit $z(t) = z_{SSM}(t) + z_{SP}(t)$ où :

- $z_{SSM}(t)$ est la solution générale de $m\frac{d^2z}{dt^2} + f\frac{dz}{dt} + kz = 0$. Elle décrit le régime transitoire.
- $z_{SP}(t)$ est une solution particulière de l'équation complète. Elle décrit le régime permanent.

Compte tenu de paragraphe 1.2 on peut considérer qu'au bout d'un certain temps le terme $z_{SSM}(t) \to 0$. Donc on considérera dans la suite que $z(t) \approx z_{SP}(t)$.

Propriété

La force supplémentaire étant sinusoïdale on recherche une solution particulière s'écrivant :

$$\boxed{z_{SP}(t) = Z_0\cos(\omega t + \phi)},$$

où l'amplitude Z_0 et la phase ϕ sont des fonctions de la pulsation ω !

La solution est donc déterminée si l'on détermine les fonctions $Z_0(\omega), \phi(\omega)$.

Pour déterminer ces fonctions la méthode la plus rapide utilise les nombres complexes.

A cet effet on pose :

- $\underline{F} = F_0 e^{j\omega t} = F_0[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]$ et donc $F = \mathrm{Re}(\underline{F})$ (partie réelle),
- $\underline{z_{SP}} = Z_0 e^{j\omega t} = Z_0[\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)]$ et donc $z_{SP} = \mathrm{Re}(\underline{Z_{SP}})$ (partie réelle).

Nous admettrons que les complexes $\underline{F}, \underline{z_{SP}}$ vérifient la même équation que F, z_{SP} :

$$\boxed{\frac{d^2\underline{z}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\underline{z}}{dt} + \omega_0^2\underline{z} = \frac{\underline{F}}{m}}$$

L'avantage n'apparaît pas à ce niveau puisqu'on a la même équation à résoudre ! Mais on peut remarquer que :

$$\frac{d\underline{z}}{dt} = \frac{d}{dt}Z_0 e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega Z_0 e^{j(\omega t+\phi)} = j\omega\underline{z} \text{ et que } \frac{d^2\underline{z}}{dt^2} = \frac{d}{dt}j\omega\underline{z} = (j\omega)^2\underline{z} = -\omega^2\underline{z}.$$

Alors l'équation différentielle devient une équation algébrique :

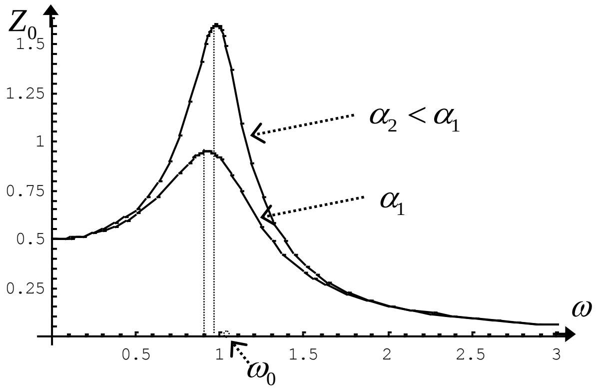
$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega\right)\underline{z} = \frac{\underline{F}}{m} \text{ qu'on peut écrire } \left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega\right)Z_0 e^{j(\omega t+\phi)} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}.$$

En prenant le module et l'argument[1] de cette équation on obtient :

$$\boxed{Z_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\omega^2\alpha^2}} \quad \text{et} \quad \tan(\phi) = \frac{-2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Phénomène de résonance

L'étude de la fonction $Z_0(\omega)$ montre que sous certaines conditions elle présente un maximum d'autant plus aiguë (courbe plus fine) que le coefficient α , donc le frottement est plus faible !



Le maximum ne s'obtient pas exactement pour $\omega = \omega_0$ mais pour $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 4\alpha^2}$. Si les frottement sont très faible, le coefficient α est faible et la résonance s'obtient pour $\omega \approx \omega_0$!

Lorsque l'amplitude de vibration $Z_0(\omega)$ présente un maximum on dit qu'il y a **résonance**.

A la résonance il y a transfert maximal d'énergie de la force excitatrice vers l'oscillateur !

Cette notion est extrêmement importante car elle intervient dans de nombreux phénomènes naturels ou dans les applications pratiques.

Par exemple un diapason est caractérisé par une pulsation propre ω_0 et un amortissement α faible. Une onde sonore de pulsation ω fera osciller, c'est à dire vibrer, le diapason. Mais cette oscillation sera maximale si l'onde sonore à une pulsation $\omega \approx \omega_0$.

L'absorption d'ondes électromagnétique par les atomes ou molécules ou la réception des ondes radio font intervenir également le phénomène de résonance d'un oscillateur.

[1] On rappelle que $|a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\left|Ae^{j\phi}\right| = A$, et que $z = a + jb \Rightarrow tg(\phi) = \dfrac{b}{a}$ où $\phi = Arg(z)$